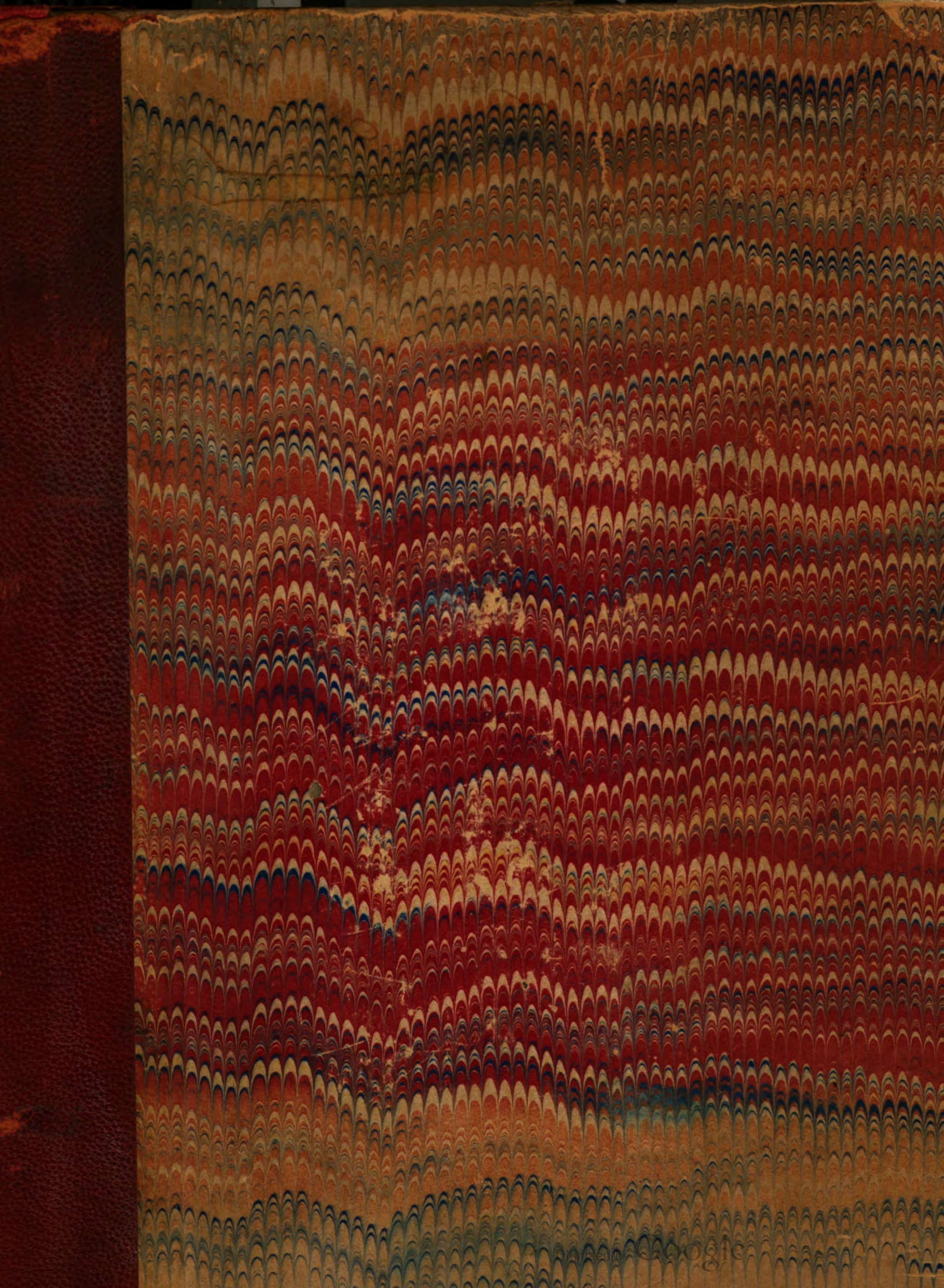





LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY OF CALIFORNIA.
GIFT OF
Göttingen Universität
Received Jan., 1889.
Accessions No. 38150 Shelf No.



# Untersuchung

der

# stationären elektrischen Strömung in einer unendlichen Ebene für den Fall, dass die Zuleitung der beiden verschiedenen Elektricitäten in zwei parallelen geradlinigen Strecken erfolgt.

**Inaugural-Dissertation**

zur

Erlangung der Doctorwürde

der

hohen philosophischen Facultät der Georg-Augusts-Universität zu Göttingen

vorgelegt

von

**Fritz Bennecke**

aus Berlin.

1886.

**HALLE.**

1887.

Druck von E. Blochmann & Sohn in Dresden.



Seinen lieben Eltern

in Dankbarkeit

gewidmet

vom

**Verfasser.**



Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit einem Problem, das einige nicht uninteressante Anwendungen der elliptischen Functionen gestattet und eine Reihe bemerkenswerther Specialisirungen zulässt. Es sind darin viele einfache und wichtige Fälle stationärer elektrischer Strömung, die bereits früher untersucht sind, als specielle Fälle oder als Grenzfälle enthalten.

Im Folgenden sollen die beiden Strecken, in denen die Zuleitung der verschiedenen Elektricitäten erfolgt, überall kurzweg als „Elektroden" bezeichnet werden. Die drei ersten der beigegebenen Tafeln sind dazu bestimmt, eine Uebersicht über die behandelten speciellen Fälle darzubieten. Die einem Theil der Elektroden angefügten Pfeilspitzen sollen ihre unendliche Erstreckung in dieser Richtung andeuten. Der Abstand der Geraden, in denen die Elektroden liegen, werde durchgehend mit E bezeichnet. Ueberall, wo nicht ausdrücklich etwas Anderes bemerkt ist, wird von den Bezeichnungen Gebrauch gemacht werden:

$$w = u + vi, \quad z = x + yi, \quad \zeta = \xi + \eta i, \quad c = a + bi.$$

In entsprechender Weise sollen die deutschen, die grossen und die mit Indices versehenen Buchstaben benutzt werden.

Endlich sei bemerkt, dass für die Anwendung der elliptischen Functionen die von Herrn Professor Schwarz herausgegebenen „Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Functionen" zu Grunde gelegt sind.

# I. Theil.

## Allgemeine Untersuchungen.

Da nach einem von den Herren Kirchhoff und C. Neumann bewiesenen Satze bei der conformen Abbildung zweier Flächen auf einander ein Strömungsnetz in der einen Fläche stets ein Strömungsnetz in der andern ergiebt, so lässt sich das Problem: „Die stationäre elektrische Strömung in einer unendlichen Ebene zu untersuchen für den Fall, dass die Elektroden von zwei parallelen geradlinigen Strecken gebildet werden", auf die Aufgabe zurückführen, die unendliche Ebene auf eine Fläche abzubilden, in der die Strömung bekannt ist. Nun stellt die Ebene, wenn man sie sich an den Elektroden aufgeschnitten denkt, einen zweifach zusammenhängenden Bereich dar. Wir wollen versuchen, sie auf den einfachsten unter diesen, nämlich das von zwei concentrischen Kreisen begrenzte Ringgebiet so abzubilden, dass die Begrenzungen beider Bereiche einander entsprechen. Dies Gebiet lässt sich wieder durch die Function $w = \ln \zeta$ auf einen einfachen $\infty$ langen Parallelstreifen abbilden in der Art, dass dem einfachen Ringgebiete $\infty$ viele Wiederholungen in dem Streifen entsprechen. Fig. 1—3.

Es mögen die Elektroden in der z-Ebene parallel sein der y-Axe; die mit kleinerer Abscisse möge dem inneren Kreise entsprechen. Die Kreise der $\zeta$-Ebene mögen die vorläufig unbestimmten Radien $R$ und $\frac{1}{R}$ haben, ihr Mittelpunkt liege im Nullpunkte. Allen concentrischen Kreisen der $\zeta$-Ebene entsprechen in der w-Ebene Parallele zur v-Axe, da $u = \ln r$, wenn $\zeta = re^{\varphi i}$. Den begrenzenden Kreisen entsprechen die Geraden durch die Punkte $\ln R$ und $-\ln R$. Dem Punkte $\zeta = 1$ entsprechen die Punkte $w = 2k\pi i$. Wir wollen uns mit der Betrachtung des Blattes begnügen, für das $k = 0$ ist und das durch die Gerade zwischen $\zeta = -R$ und $\zeta = -\frac{1}{R}$ doppelt begrenzt wird. Dann

entspricht dem inneren Kreise der $\zeta$-Ebene oder der Elektrode mit kleinerer Abscisse in der z-Ebene die Gerade zwischen den Punkten $w = -\ln R \pm \pi i$, dem betrachteten Blatte entspricht das Rechteck mit den vier Eckpunkten $w = \pm \ln R \pm \pi i$. Es ist jetzt nach der Annahme die ganze z-Ebene einfach auf das betrachtete Blatt des Kreisringes, dieses wieder einfach auf das Rechteck abgebildet, so dass also auch die einfache z-Ebene dem einfachen Rechteck entspricht. Den concentrischen Kreisen der $\zeta$-Ebene und den Parallelen zur Axe des Imaginären in der w-Ebene entsprechen jetzt die Spannungscurven, den die Kreise rechtwinklig schneidenden Geraden der $\zeta$-Ebene und den Parallelen zur Axe des Reellen in der w-Ebene die Strömungscurven.

Dem Punkte $z = \infty$ möge entsprechen $\zeta = \zeta' = r'e^{\varphi' i}$ und $w = w'$. Setzt man dann $\varphi_1 = \varphi - \varphi'$, $\zeta_1 = re^{\varphi_1 i}$, $w_1 = \ln r + \varphi_1 i$, so wird für $\varphi = \varphi'$ oder $\varphi_1 = 0$ : $\zeta_1 = r$, $w_1 = \ln r$, d. h. man kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass bei der conformen Abbildung dem Werthe $z = \infty$ reelle Werthe von $\zeta$ und w entsprechen. Nun kann man den Satz*) anwenden:

„Wenn bei der conformen Abbildung zweier ebenen Bereiche auf einander eine geradlinige Strecke des einen einer solchen des andern entspricht, so entsprechen die zu diesen Strecken symmetrisch liegenden Punktepaare der einen solchen der andern Ebene."

In unserm Falle entspricht die Elektrode mit kleinerer Abscisse der Rechtecksseite mit kleinerer Abscisse. Zu jedem Punkte w erhält man durch fortgesetzte Spiegelung in Bezug auf beide Rechtecksseiten $\infty$ viele Punkte in zwei Schaaren, von denen die eine durch den Ausdruck dargestellt ist: $w + 4k \ln R$. Diesen entsprechen in der z-Ebene die Punkte $z + 2kE$. Also entsprechen sich in den drei Ebenen die Punkte, die im folgenden Schema auf gleicher Horizontalreihe stehen:

Fig. 4, 5.

| w | | $\zeta$ | z |
|---|---|---|---|
| $w + 2h\pi i$ | $e^{w + 2h\pi i} =$ | $\zeta$ | z |
| $w + 4k\ln R$ | $e^{w + 4k\ln R} =$ | $\zeta \cdot R^{4k}$ | $z + 2kE$ |
| $w + 2h\pi i + 4k\ln R$ | | $\zeta \cdot R^{4k}$ | $z + 2kE$ |

*) Vergl. H. A. Schwarz, über einige Abbildungsaufgaben. Crelle's Journal, Bd. 70.



Folglich ist z eine einfach periodische Function von w, ihre Ableitung nach w eine doppelt periodische. Man kann also $\frac{dz}{dw}$ als elliptische Function von w betrachten mit den Perioden

$$2\omega_3 = 2\pi i \quad \text{und} \quad 2\omega_1 = 4 \ln R,$$

und das Rechteck mit den Ecken $-\frac{\omega_1}{2} \pm \omega_3$ und $\frac{3\omega_1}{2} \pm \omega_3$ als Periodenparallelogramm.

Ferner nehmen wir an, es sei $w' = u'$ derjenige Punkt des betrachteten Bereichs der w-Ebene, welchem der $\infty$ ferne Punkt der z-Ebene entspricht. Durch einfache Spiegelung in der w-Ebene finden wir einen Werth $w'' = u'' = \omega_1 - u'$, durch entsprechende Spiegelung in der z-Ebene kommen wir zum $\infty$ fernen Punkte zurück. Da das halbe Periodenparallelogramm und die z-Ebene sich gegenseitig punktweise eindeutig entsprechen, so muss z für die Stellen $w = w'$ und $w = w''$ und für keine andern im Innern des ganzen Periodenparallelogramms $\infty$ gross werden, und zwar für jede von der ersten Ordnung. $\frac{dz}{dw}$ wird also an diesen Stellen $\infty$ gross von der zweiten Ordnung und hat daher die Form:

$$\frac{dz}{dw} = C \frac{\sigma(w-w_1)\sigma(w-w_2)\sigma(w-w_3)\sigma(w-w_4)}{\sigma^2(w-w')\sigma^2(w-w'')} = \frac{C.f(w)}{\sigma^2(w-w')\sigma^2(w-w'')}.$$

Dabei ist

$$w_1 + w_2 + w_3 + w_4 = 2w' + 2w'' = 2\omega_1.$$

Dies wollen wir zum Zwecke der Integration umformen.*) Es wird

$$\frac{dz}{dw} = C_0 + C_1 \frac{\sigma'(w-w')}{\sigma(w-w')} + C_2 \frac{\sigma'(w-w'')}{\sigma(w-w'')} - C_1' \frac{d}{dw} \frac{\sigma'(w-w')}{\sigma(w-w')} - C_2' \frac{d}{dw} \frac{\sigma'(w-w'')}{\sigma(w-w'')},$$

wo $C_1 + C_2 = 0$ ist. Ausserdem erhält man noch für die Constanten, wenn man beide Ausdrücke einmal nach Potenzen von $w - w'$, dann von $w - w''$ entwickelt und die Coëfficienten vergleicht, folgende Werthe:

$$C_1 = \frac{C f(w')}{\sigma^2(w'-w'')} \left\{ \frac{f'(w')}{f(w')} - 2 \frac{\sigma'(w'-w'')}{\sigma(w'-w'')} \right\}, \qquad C_1' = \frac{C f(w')}{\sigma^2(w'-w'')},$$

$$C_2 = \frac{C f(w'')}{\sigma^2(w'-w'')} \left\{ \frac{f'(w'')}{f(w'')} + 2 \frac{\sigma'(w'-w'')}{\sigma(w'-w'')} \right\} = -C_1, \quad C_2' = \frac{C f(w'')}{\sigma^2(w'-w'')},$$

die später noch benutzt werden sollen. Durch Integration findet man:

$$z = C_0' + C_0 w + C_1 \ln \sigma(w-w') - C_1 \ln \sigma(w-w'') - C_1' \frac{\sigma'(w-w')}{\sigma(w-w')} - C_2' \frac{\sigma'(w-w'')}{\sigma(w-w'')}.$$

---

*) Form. u. Lehrs., Art. 16.



Wenn durch diese Function das Rechteck wirklich zusammenhängend und in eindeutiger Weise auf die z-Ebene abgebildet werden soll, so muss $C_1 = 0$ sein, so dass zwischen den Null- und Unendlichkeitsstellen folgende Gleichungen bestehen:

$$\alpha)\ \frac{f'(w')}{f(w')} = 2\frac{\sigma'(w'-w'')}{\sigma(w'-w'')} = -\frac{f'(w'')}{f(w'')}.$$

Also wird:

$$z = C_0' + C_0 w - C_1' \frac{\sigma'(w-w')}{\sigma(w-w')} - C_2' \frac{\sigma'(w-w'')}{\sigma(w-w'')}.$$

Es soll nun z die Eigenschaft haben, dass

$$1)\ z(w+2\omega_3) = z(w),$$
$$2)\ z(w+2\omega_1) = z(w) + 2E,$$
$$3)\ \Re\left[z\left(\pm\frac{\omega_1}{2}+vi\right)\right] = \text{const.}$$

Daraus folgt:

$$1)\ 0 = C_0 \,.\, 2\omega_3 - (C_1' + C_2') \,.\, 2\eta_3,$$
$$2)\ 2E = C_0 \,.\, 2\omega_1 - (C_1' + C_2') \,.\, 2\eta_1.$$

Da die Determinante $\eta_1\omega_3 - \omega_1\eta_3 = \frac{\pi i}{2} = \frac{\omega_3}{2}$ von 0 verschieden ist, so folgt aus 1) und 2):

$$C_0 = -2E\frac{\eta_3}{\omega_3}, \quad C_1' + C_2' = -2E.$$

Setzt man $C_0$ und $C_2'$ in z ein, so erhält man:*)

$$\Re\left[z\left(\pm\frac{\omega_1}{2}+vi\right)\right] = \text{const.} + (E + A_1') \frac{\wp'\left(u' \mp \frac{\omega_1}{2}\right)}{\wp\left(u' + \frac{\omega_1}{2}\right) - \wp vi}.$$

Da allgemein $-\frac{\omega_1}{2} \leq u' \lesseqgtr \frac{\omega_1}{2}$, so folgt aus 3), dass entweder, je nach den oben geltenden Vorzeichen, $u' = \mp\frac{\omega_1}{2}$, oder $E + A_1' = 0$ sein muss. Nun kann $u'$ nicht gleichzeitig jene beiden Werthe annehmen, also ergiebt sich: $A_1' = -E$, und

$$z = (E + B_1'i)\frac{\sigma'(w+u'-\omega_1)}{\sigma(w+u'-\omega_1)} + (E - B_1'i)\frac{\sigma'(w-u')}{\sigma(w-u')} - 2E\frac{\eta_3}{\omega_3}w + C_0',$$

$$\frac{dz}{dw} = -(E + B_1'i)\wp(w+u'-\omega_1) - (E - B_1'i)\wp(w-u') - 2E\frac{\eta_3}{\omega_3}.$$

Der für z gefundene Ausdruck enthält sechs reelle Constanten, nämlich

$$u',\ \omega_1,\ E,\ B_1',\ A_0',\ B_0',\ (\text{da } C_0' = A_0' + B_0' i),$$

die in der That verfügbar sein müssen, da die Lage jeder Elektrode in der

*) Form. u. Lehrs., Art. 8 und 11.

z-Ebene durch drei Constanten bestimmt wird. Dabei entspricht E der Entfernung der beiden Geraden, in denen die Elektroden liegen, von einander, $C_0'$ der Lage des Coordinatenanfangspunktes.

$\frac{dz}{dw}$ ist eine elliptische Function vierten Grades, die also an vier Stellen und nur an vier Stellen des Periodenparallelogramms verschwindet. Wir wollen diese $w_1', w_2', w_3', w_4'$ nennen und ihre Lage untersuchen. Setzt man $w = \pm \frac{\omega_1}{2} + vi$, so wird $\frac{dz}{dw}$, wie die Anwendung der Additionstheoreme (7.) und (9.) in Art. 12 der „Form. u. Lehrs." ergiebt, reell. Wir wissen, dass die vier Unendlichkeitsstellen im Allgemeinen nicht auf den beiden Strecken $w = \pm \frac{\omega_1}{2} + vi$ liegen. Da $\frac{dz}{dw}$ auf diesen stetig ist, so können wir die Nullstellen auf ihnen abgrenzen, wenn wir je drei auf einander folgende Werthe finden, für die $\frac{dz}{dw}$ verschiedenes Vorzeichen hat.

Es wird, wenn $\varepsilon = \pm 1$, für:

$$w = \varepsilon \frac{\omega_1}{2}, \qquad \frac{dz}{dw} = -2E\left\{\wp\left(u' - \varepsilon \frac{\omega_1}{2}\right) + \frac{\eta_3}{\omega_3}\right\},$$

$$w = \varepsilon \frac{\omega_1}{2} \pm \omega_3, \quad \frac{dz}{dw} = -2E\left\{\wp\left(u' - \varepsilon \frac{\omega_1}{2} + \omega_3\right) + \frac{\eta_3}{\omega_3}\right\}.$$

Es lässt sich nun zeigen, dass die Ausdrücke in den Klammern verschiedene Vorzeichen haben. Dazu diene folgender

**Hülfssatz:** Für reelle Werthe von $\omega_1$ und $\frac{\omega_3}{i}$ ist

$$\wp\left(\omega_1 + \frac{\omega_3}{2}\right) < -\frac{\eta_3}{\omega_3} < \frac{e_1 + e_2}{2}.$$

**Beweis:** Es ist

$$-\eta_3 = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \wp w \, dw = \int_0^{\frac{\omega_3}{2}} \wp(\omega_1 + w)\, dw + \int_0^{\frac{\omega_3}{2}} \wp(\omega_2 - w)\, dw$$

und

$$-\frac{\eta_3}{\omega_3} = \int_0^{\frac{\omega_3}{2}} f(w)\, dw : \int_0^{\frac{\omega_3}{2}} dw,$$

wo gesetzt ist:

$$f(w) = \frac{1}{2}\left\{\wp(\omega_1 + w) + \wp(\omega_2 \pm w)\right\} = \frac{1}{2}\left\{\wp(\omega_1 + w) + e_3 + \frac{(e_1 - e_3)(e_2 - e_3)}{\wp(\omega_1 + w) - e_3}\right\}.$$

Es stellt also $-\frac{\eta_3}{\omega_3}$ das arithmetische Mittel der Werthe dar, die $f(w)$ auf der Strecke von $w = 0$ bis $w = \frac{\omega_3}{2}$ annimmt. Nun ist

$$f'(w) = \frac{i}{2} \cdot \left\{1 - \frac{(e_1 - e_3)(e_2 - e_3)}{[\wp(\omega_1 + w) - e_3]^2}\right\} \cdot \frac{\wp'(\omega_1 + w)}{i}.$$

Die beiden letzten Factoren sind reell, und in Folge der Gleichung:

$$\wp\left(\omega_1 + \frac{\omega_3}{2}\right) = e_3 + \sqrt{(e_1 - e_3)(e_2 - e_3)}$$

wird auf jener Strecke keiner von ihnen negativ und nur an den Grenzen verschwindet je einer. Daher ist $\frac{f'(w)}{i} \geqq 0$, also nach dem Mittelwerthsatze:

$$f\left(\frac{\omega_3}{2}\right) < -\frac{\eta_3}{\omega_3} < f(o),$$

woraus der oben ausgesprochene Satz folgt. —

Anmerkung: Ein einfacher geometrischer Beweis ist mir von Herrn Professor Schwarz mitgetheilt worden. Durch die Function $\wp w$ wird das Rechteck mit den Ecken $\pm \omega_3$ und $\omega_1 \pm \omega_3$ auf eine volle Ebene abgebildet, wobei der Geraden durch $\frac{\omega_3}{2}$ und $\omega_1 + \frac{\omega_3}{2}$ ein Kreis um $e_3$ entspricht. Da die Punkte $\omega_1 + vi$ und $\omega_2 - vi$ in Bezug auf die Gerade symmetrisch liegen, so liegen die Punkte $e_1$ und $e_2$, und allgemein $\wp(\omega_1 + vi)$ und $\wp(\omega_2 - vi)$ symmetrisch in Bezug auf den Kreis. Nun folgt nach bekannten Sätzen, dass die Mitte der beiden letzteren, die oben durch $f(w)$ bezeichnet ist, zwischen der Kreislinie und der Mitte von $e_1$ und $e_2$, d. h. zwischen $\wp\left(\omega_1 + \frac{\omega_3}{2}\right)$ und $\frac{e_1 + e_2}{2}$ liegt. Da $-\frac{\eta_3}{\omega_3}$ ein Mittelwerth der Grössen $f(w)$ ist, so gilt von dem diese Grösse darstellenden Punkte dasselbe. — Aehnlich ergiebt sich: $\frac{e_2 + e_3}{2} < -\frac{\eta_1}{\omega_1} < \wp\left(\omega_3 + \frac{\omega_1}{2}\right)$. —

Fig. 4. Nun liegt im Allgemeinen $u' - \varepsilon\frac{\omega_1}{2}$ auf der Strecke zwischen 0 und $-\varepsilon\omega_1$, $u' - \varepsilon\frac{\omega_1}{2} + \omega_3$ zwischen $\omega_3$ und $-\varepsilon\omega_1 + \omega_3$, und da $\wp w$ auf dem Rande des Rechtecks mit den Ecken $0$, $-\varepsilon\omega_1$, $-\varepsilon\omega_1 + \omega_3$, $\omega_3$ alle reellen Werthe von $+\infty$ bis $-\infty$ einmal annimmt, so folgt:

$$\wp\left(u' - \varepsilon\frac{\omega_1}{2} + \omega_3\right) < e_2 < \wp\left(\omega_1 + \frac{\omega_3}{2}\right) < -\frac{\eta_3}{\omega_3} < \frac{e_1 + e_2}{2} < e_1 < \wp\left(u' - \varepsilon\frac{\omega_1}{2}\right).$$

Daraus geht hervor:

„Wenn $E > 0$ ist, so hat $\frac{dz}{dw}$ an den Stellen $w = \varepsilon\frac{\omega_1}{2}$ und $w = \varepsilon\frac{\omega_1}{2} \pm \omega_3$ verschiedenes Vorzeichen, oder die vier Nullstellen liegen auf den vier Strecken $w = \varepsilon\frac{\omega_1}{2} \ldots \varepsilon\frac{\omega_1}{2} \pm \omega_3$".

Wenn $E = 0$ ist, so wird $\frac{dz}{dw}$ an den sechs Stellen $w = \varepsilon\frac{\omega_1}{2}$ und $w = \varepsilon\frac{\omega_1}{2} \pm \omega_3$, von denen nur vier zu dem Periodenparallelogramm zu rechnen sind, von der ersten Ordnung $\infty$ klein. Wir wollen setzen:

$$w_1' = -\frac{\omega_1}{2} + v_1 i, \quad w_3' = \frac{\omega_1}{2} + v_3 i,$$

$$w_2' = -\frac{\omega_1}{2} + v_2 i, \quad w_4' = \frac{\omega_1}{2} + v_4 i,$$

$$-\pi \leqq v_2 < 0 \leqq v_1 < \pi, \quad -\pi < v_4 \leqq 0 < v_3 \leqq \pi.$$

Wenn ein $v_k$ den Grenzwerth erreicht, so müssen alle den Grenzwerth erreichen, weil dann $E = 0$ sein muss. Die Werthe $w_1', \dots w_4'$ entsprechen den vier Elektrodenenden der z-Ebene.

Für $w = \varepsilon \frac{\omega_1}{2}$ ist $\frac{dz}{dw} < 0$, wenn $E > 0$ ist (s. p. 9). Folglich muss, wenn der die Grösse w darstellende Punkt den geraden Weg von $w_2$ nach $w_1$ beschreibt, der die Grösse z darstellende Punkt die entsprechende Elektrode in umgekehrter Richtung durchlaufen, so dass die Punkte $z_1$, $z_3$ die kleinere, $z_2$, $z_4$ die grössere Ordinate haben. Fig. 6.

Wenn $E = 0$ ist, so entspricht die Strecke $w_1$, $w_4$ einer Strömungslinie, die durch den Punkt $z = \infty$ hindurchgeht, also dem äusseren Theil der Symmetrieaxe. Folglich müssen die Elektrodenenden in der Reihenfolge $z_1, z_2, z_3, z_4$ angeordnet sein. Fig. 18.

Es bestand die Gleichung (s. p. 7):

$$\sum_{k=1}^{4} w_k = 2w' + 2w'' = 2\omega_1.$$

Nun können wir setzen:

$$w_k = w_k' \ (k = 1, 2, 3), \quad w_4 = w_4' + 2p\omega_1 + 2q\omega_3.$$ Fig. 4.

Durch Einsetzen finden wir:

$$(v_1 + v_2 + v_3 + v_4)i + 2p\omega_1 + 2q\omega_3 = 2\omega_1.$$

Man erhält durch Vergleichung der reellen Bestandtheile: $p = 1$, und mit Rücksicht auf die für die Grössen $v_k$ bestehenden Ungleichungen: $q = 0$, d. h. $w_4 = w_4' + 2\omega_1$, und

$$1) \quad \sum_{k=1}^{4} w_k' = (v_1 + v_2 + v_3 + v_4)i = 0.$$

Für $E = 0$ ist die Gleichung nach unserer früheren Bestimmung ebenfalls erfüllt. Der Punkt $w = -\frac{\omega_1}{2} + \omega_3$ ist vom Periodenparallelogramm auszuschliessen und dafür der Punkt $w = -\frac{\omega_1}{2} - \omega_3$ einzurechnen.

Setzt man in die Gleichungen $\alpha$) (p. 8) die Werthe von $w'$ und $w''$ ein, so werden sie:

$$2)\quad \sum_{k=1}^{4} \frac{\sigma'(u'-w_k)}{\sigma(u'-w_k)} = 2\frac{\sigma'(2u'-\omega_1)}{\sigma(2u'-\omega_1)} = \sum_{k=1}^{4} \frac{\sigma'(u'-\omega_1+w_k)}{\sigma(u'-\omega_1+w_k)}.$$

Da nun $z_k = z(w_k')$, so kann man die Gleichung aufstellen (vergl. den Ausdruck für z, p. 8), wenn man $k = 1, .. 4$ setzt:

$$\Sigma z_k = (E + B_1'i) \Sigma \frac{\sigma'(u'-\omega_1+w_k')}{\sigma(u'-\omega_1+w_k')} - (E - B_1'i) \Sigma \frac{\sigma'(u'-w_k')}{\sigma(u'-w_k')} - 2\frac{\eta_3}{\omega_3} E \Sigma w_k' + 4 C_0',$$

oder durch Einführung von $w_k$ mit Berücksichtigung der Gleichungen 1), 2) oben:

$$\Sigma z_k = (E + B_1'i)\left\{2\frac{\sigma'(2u'-\omega_1)}{\sigma(2u'-\omega_1)} - 2\eta_1\right\} - (E - B_1'i)\left\{2\frac{\sigma'(2u'-\omega_1)}{\sigma(2u'-\omega_1)} + 2\eta_1\right\} + 4C_0'$$

oder

$$\tfrac{1}{4}\Sigma z_k = -E\eta_1 + B_1'i\frac{\sigma'(2u'-\omega_1)}{\sigma(2u'-\omega_1)} + C_0'.$$

Fig. 6. Wird jetzt $Z = z - \frac{1}{4}\Sigma z_k$ gesetzt, so fällt der Nullpunkt der Z-Ebene mit dem Schwerpunkte der vier Elektrodenenden zusammen. Also haben wir:

$$Z = E\left\{\frac{\sigma'(w+u'-\omega_1)}{\sigma(w+u'-\omega_1)} + \frac{\sigma'(w-u')}{\sigma(w-u')} - 2\frac{\eta_3}{\omega_3}w + \eta_1\right\} +$$
$$+ B_1'i\left\{\frac{\sigma'(w+u'-\omega_1)}{\sigma(w+u'-\omega_1)} - \frac{\sigma'(w-u')}{\sigma(w-u')} - \frac{\sigma'(2u'-\omega_1)}{\sigma(2u'-\omega_1)}\right\}.$$

Diese Wahl des Coordinatenanfangspunktes empfiehlt sich für alle Fälle, in denen die Elektroden ganz im Endlichen liegen, und für einen Theil der übrigen Fälle. In der Z-Ebene sind jetzt, ausser dem Abstande E, noch die Längen der Elektroden und der Winkel $\alpha$, den die Verbindungslinie ihrer Mitten mit der Axe des Reellen einschliesst, willkürlich, entsprechend den drei in der Gleichung $Z = F(w)$ verfügbaren reellen Constanten:

$$u',\ \omega_1,\ B_1'.$$

Es lässt sich nun behaupten, „dass das halbe Periodenparallelogramm der w-Ebene und die ganze Z-Ebene sich eindeutig entsprechen."

Fig. 7, 8. Beweis: Da $Z = F(w)$ eine eindeutige Function von w ist, so entspricht jedem Punkte der w-Ebene ein und nur ein Punkt der Z-Ebene. Dass umgekehrt zu jedem Werthe $Z = Z_0$, der nicht auf den Elektroden liegt, ein und nur ein Punkt des halben Periodenparallelogramms gehört, folgt aus der Betrachtung der Charakteristik. Lassen wir den die Grösse w dar-



stellenden Punkt die Begrenzung des Rechtecks durchlaufen, so beschreibt der die Grösse Z darstellende einen geschlossenen Weg, indem er die beiden Elektroden und eine sie verbindende ganz im Endlichen liegende Curve überall zwei Mal in entgegengesetzter Richtung durchläuft.

Er überschreitet daher einen beliebigen von $Z_0$ aus ins Unendliche gezogenen Strahl von beiden Seiten gleich oft, so lange $Z_0$ nicht auf dem Wege selbst liegt. Es ist also die Charakteristik jedes nicht auf diesem Wege liegenden Punktes $Z_0$ gleich 0, mit andern Worten, es wird der Werth $Z_0$ innerhalb des betrachteten Rechtecks genau ebenso oft angenommen, als die Function F(w) innerhalb desselben $\infty$ gross wird. Die Function F(w) wird aber nur an einer einzigen Stelle, und zwar von der ersten Ordnung $\infty$ gross, also wird auch der Werth $Z_0$ an einer und nur an einer Stelle des Gebietes erreicht. —

Um das Verhalten der Spannungs- und Strömungscurven in der Nähe des Unendlichkeitspunktes zu untersuchen, setzen wir $w = u' + \zeta'$. Dann ergiebt sich durch Entwicklung der Function F(w) nach Potenzen von $\zeta'$ für die Umgebung des Punktes $\zeta' = 0$:

$$Z = \frac{E - B_1' i}{\zeta'} + E \left\{ \frac{\sigma'(2u' - \omega_1)}{\sigma(2u' - \omega_1)} - 2 \frac{\eta_3}{\omega_3} u' + \eta_1 \right\} + (\zeta').$$

Das entspricht näherungsweise einer conformen Abbildung der Umgebung des Punktes $w = u'$ durch reciproke Radien. Die Spannungs- und Strömungscurven in der Nähe des Unendlichkeitspunktes haben näherungsweise die Gestalt von Kreisbogen, und zwar gehen die zugehörigen Kreise sämmtlich durch den auf der Axe des Reellen liegenden Punkt:

$$Z = E \left\{ \frac{\sigma'(2u' - \omega_1)}{\sigma(2u' - \omega_1)} - 2 \frac{\eta_3}{\omega_3} u' + \eta_1 \right\} = A.$$

Die Kreise der einen Schaar einerseits und die der andern Schaar andererseits besitzen je eine durch den Punkt hindurchgehende gemeinsame Tangente. Die Gleichungen dieser beiden Tangenten sind beziehentlich:

$$X - A = -\frac{EY}{B_1'} \text{ (für die Strömungscurven)},$$

$$X - A = \frac{B_1' Y}{E} \text{ (für die Spannungscurven)}.$$

Bei der Ausführung von Zeichnungen leisten diese auf einander senkrechten Geraden werthvolle Dienste.



Die Gleichung $Z = F(w)$ ist unter der Voraussetzung hergeleitet, dass die conforme Abbildung der ganzen Z-Ebene auf das Rechteck der w-Ebene möglich ist. Dass eine solche Abbildung für jede Wahl der Elektrodenenden möglich ist, ergiebt sich aus den Untersuchungen der Herren Schwarz*) und Schottky.**) Es schien mir jedoch nicht überflüssig zu sein, in einigen speciellen Fällen direct den Beweis zu führen, dass sich die in der hergeleiteten Function auftretenden Constanten so bestimmen lassen, dass allen gestellten Bedingungen genügt wird. —

Im Folgenden sollen einige specielle Fälle und Grenzfälle der in Vorstehendem allgemein gelösten Aufgabe behandelt werden, und zwar in der Weise, dass wir für die Figur in der Z-Ebene specielle geometrische Eigenschaften vorschreiben und daraus die abbildende Function herzustellen suchen.

---

*) Ueber die Integration der partiellen Differentialgleichung $\Delta u = 0$ u. s. w. Monatsber. d. Berl. Akad. Okt. 1870, a. a. O.

**) Ueber die conforme Abbildung mehrfach zusammenhängender ebener Flächen. Crelles Journal, Bd. 83.

# II. Theil.

## Specielle Fälle.

### I. „Voraussetzung einer Symmetrieaxe. E sei von 0 verschieden." — Fig. 9.

Wenn die Figur der Z-Ebene in Bezug auf die Axe des Reellen zu sich selbst symmetrisch ist, ohne dass beide Elektroden derselben Geraden angehören, so ist zu vermuthen, dass auf dieser Axe zwei Strömungslinien liegen, von denen die eine sich ins Unendliche erstreckt, also in der w-Ebene der Axe des Reellen entspricht. Wenn dies der Fall ist, so müssen je zwei conjugirten Werthen der complexen Grösse w zwei conjugirte Werthe der complexen Grösse Z entsprechen und umgekehrt. Für die Punkte $w_k'$ und $Z_k$ gilt dasselbe. Es muss also sein:

$$v_1 + v_2 = 0, \quad v_3 + v_4 = 0.$$

Für $w = u$ muss ferner $Y = 0$ sein. Da in dem Ausdrucke für Z beide Klammerausdrücke für reelle Werthe von w reell werden, so muss für jeden Werth von u:

$$Y = B_1' \left\{ \frac{\sigma'(u + u' - \omega_1)}{\sigma(u + u' - \omega_1)} - \frac{\sigma'(u - u')}{\sigma(u - u')} - \frac{\sigma'(2u' - \omega_1)}{\sigma(2u' - \omega_1)} \right\} = 0,$$

Y also von u unabhängig sein, d. h. es ist auch:

$$\frac{\partial Y}{\partial u} = B_1' \left\{ \wp(u - u') - \wp(u + u' - \omega_1) \right\} = 0.$$

1) Wäre $\wp(u + u' - \omega_1) = \wp(u - u')$, dann müsste $u' - \omega_1 - (-u') = 2u' - \omega_1$ eine Periode des Arguments der Function $\wp u$ sein, wenn die Gleichung für jeden Werth von u gelten soll. Hieraus folgt, dass $u'$ nur die Werthe $\pm \frac{\omega_1}{2}$ haben könnte. Da für keinen dieser Werthe, falls $B_1' \gtrless 0$, Y den Werth 0 erhält, so muss:



2) $B_1' = 0$ sein. Dadurch wird:

$$Z = E\left\{\frac{\sigma'(w + u' - \omega_1)}{\sigma(w + u' - \omega_1)} + \frac{\sigma'(w - u')}{\sigma(w - u')} - 2\frac{\eta_3}{\omega_3}w + \eta_1\right\}.$$

Da reellen Werthen des Arguments reelle Werthe der Function entsprechen, so entsprechen conjugirten Werthen des Arguments conjugirte Werthe der Function und umgekehrt. Dasselbe gilt für die Ableitung, woraus die symmetrische Lage der Elektrodenenden zur X-Axe folgt.

Für $w = u + \omega_3$ wird Z reell, d. h. der Strecke $w = u + \omega_3$ entspricht der zwischen den Elektroden liegende Theil der X-Axe. Einem Punkte dieser Strecke entspricht der Punkt $Z = 0$. —

Fig. 10.

## II. „Die Elektroden seien gleich lang." —

Dann ist $Z_1 + Z_4 = 0$, $Z_2 + Z_3 = 0$. Da bei Vertauschung von Z mit —Z jede der beiden Elektroden in die andere übergeführt wird, so ist zu vermuthen, dass es möglich sein wird, über die in der Function auftretenden Constanten eine solche Verfügung zu treffen, dass allgemein einer Vertauschung von w mit —w eine solche von Z mit —Z entspricht. Hierbei muss Z(0) entweder 0 oder $\infty$ sein. Nach den früheren Festsetzungen ist nur die letztere Annahme zulässig, d. h. es ist $u' = 0$, also

$$Z = (E + B_1'i)\left\{\frac{\sigma'(w - \omega_1)}{\sigma(w - \omega_1)} + \eta_1\right\} + (E - B_1'i)\frac{\sigma' w}{\sigma w} - 2E\frac{\eta_3}{\omega_3}w.$$

Die Grösse Z ist eine ungerade, also $\frac{dZ}{dw}$ eine gerade Function von w. Durch die Untersuchung der Abbildung, welche durch die vorstehende Function vermittelt wird, kann die ausgesprochene Vermuthung bestätigt werden.

Für $w = \omega_3$ wird $Z = 0$. Ferner wird für kleine Werthe von w:

$$Z = \frac{E - B_1'i}{w} + (w),$$

(vergl. p. 13), und die geradlinigen Asymptoten der durch $Z = \infty$ gehenden Curven werden durch die Gleichungen dargestellt:

$$B_1'X = -EY \text{ (Strömungscurve)},$$
$$EX = B_1'Y \text{ (Spannungscurve)}.$$

Sie schneiden sich also im Punkte $Z = 0$. —

**III. „Die Elektroden seien gleich lang und senkrecht zur Verbindungslinie ihrer Mitten."** — Fig. 11, 61.

Dieser Fall ist ein specieller der beiden vorhergehenden Fälle, daher wird $B_1' = 0$ und $u' = 0$. Also ist

$$Z = E\left\{\frac{\sigma'(w-\omega_1)}{\sigma(w-\omega_1)} + \frac{\sigma' w}{\sigma w} - 2\frac{\eta_3}{\omega_3} w + \eta_1\right\},$$

$$\frac{dZ}{dw} = -E\left\{\wp(w-\omega_1) + \wp w + 2\frac{\eta_3}{\omega_3}\right\}.$$

Rein imaginären Werthen von w entsprechen rein imaginäre von Z. Daher muss Z schon um E wachsen, wenn w um $\omega_1$ vermehrt wird, weil in beiden Ebenen ein neues Paar sich entsprechender Geraden auftritt. In der That ist $\frac{dZ}{dw}$ eine elliptische Function mit den Perioden $\omega_1$, $2\omega_3$. Daraus geht hervor, dass dieser Fall sich durch Einführung der halben reellen Periode einfacher behandeln lässt.

Wir setzen $\omega_1 = 2\overline{\omega_1}$. Dann wird Z im Periodenparallelogramm nur an der Stelle $w = 0$ von der ersten, $\frac{dZ}{dw}$ von der zweiten Ordnung $\infty$ gross, und es wird nach Art. 16 der „Form. u. Lehrs.":

$$\frac{dZ}{dw} = C_0 - C_1' \frac{d}{dw}\frac{\sigma' w}{\sigma w} = C_0 + C_1' \wp w = C\,\frac{\sigma(w-w_1)\,\sigma(w-w_2)}{\sigma^2 w}.$$

Es wird $C_1' = C\sigma w_1\, \sigma w_2$, $w_1 + w_2 = 0$ und $Z = C_0' + C_0 w - C_1' \frac{\sigma' w}{\sigma w}$.

Jetzt werde wieder $\omega_1$ an Stelle von $\overline{\omega_1}$ gesetzt. Z soll die Eigenschaft haben, dass

1) $Z(w + 2\omega_3) = Z(w)$,
2) $Z(w + 2\omega_1) = Z(w) + E$,
3) $\Re\left[Z(\pm\frac{\omega_1}{2} + vi)\right] = \text{const.}$

Aus 1) und 2) folgt (vergl. 1) 2) p. 8):

$$C_0 = -E\frac{\eta_3}{\omega_3},\; C_1' = -E, \text{ also } Z = E\left\{\frac{\sigma' w}{\sigma w} - \frac{\eta_3}{\omega_3} w\right\} + C_0'.$$

Die dritte Bedingung ist von selbst erfüllt, wie durch Einsetzen leicht zu sehen ist.

Durch Verlegung des Nullpunktes der Z-Ebene in den Schwerpunkt der Elektrodenenden ergiebt sich $C_0' = 0$, also





$$Z = E\left\{\frac{\sigma' w}{\sigma w} - \frac{\eta_3}{\omega_3} w\right\},$$

$$\frac{dZ}{dw} = -E\left\{\wp w + \frac{\eta_3}{\omega_3}\right\}.$$

Die Figur der Z-Ebene ist, abgesehen von E, nur noch von einer willkürlichen Constanten abhängig, entsprechend der Länge der Elektroden. Ebenso ist in der obigen Function noch eine Constante verfügbar, $\omega_1$.

Es lässt sich nun behaupten:

„Für jede beliebige Länge der Elektroden existirt ein und nur ein Werth $\omega_1$, für den die gefundene Function die Abbildung vermittelt."

Beweis: Setzen wir $Z_1 = -\frac{E}{2} - \Gamma_1 i = F(w_1)$, so wird $F'(w_1) = 0$. Es ist jetzt zu beweisen, dass $w_1$ sich aus der Gleichung $F'(w_1) = 0$ durch geeignete Wahl von $\omega_1$ stets so bestimmen lässt, dass $\Re[iF(w_1)] = \Gamma_1$ jeden beliebig vorgeschriebenen positiven Werth annimmt, oder dass die beiden Unbekannten $\omega_1$ und $w_1$ durch das Gleichungssystem eindeutig bestimmt sind:

$$1)\quad \wp w_1 + \frac{\eta_3}{\omega_3} = 0,$$

$$2)\quad E\left\{\frac{\sigma' w_1}{\sigma w_1} - \frac{\eta_3}{\omega_3} w_1\right\} = -\frac{E}{2} - \Gamma_1 i.$$

Es wird, wenn $\varepsilon = \pm 1$ ist, für

$$w = \varepsilon\omega_1 \pm \frac{\omega_3}{2}, \quad \frac{dZ}{dw} = -E\left\{\wp\left(\omega_1 + \frac{\omega_3}{2}\right) + \frac{\eta_3}{\omega_3}\right\},$$

$$w = \varepsilon\omega_1, \quad \frac{dZ}{dw} = -E\left\{e_1 + \frac{\eta_3}{\omega_3}\right\}.$$

Da $E > 0$, so hat nach dem p. 9, 10 bewiesenen Satze die Ableitung an jenen Stellen verschiedenes Vorzeichen, und da sie auf den vier zwischen ihnen liegenden Strecken endlich, stetig und reell ist, so muss sie auf jeder eine Nullstelle haben. Von diesen sind nur zwei, die wir $w_1$, $w_2$ nennen, zum Periodenparallelogramm zu rechnen. Dann ist $w_1 + w_2 = 0$. Wir setzen fest:

$$w_1 = -\omega_1 + v_1 i, \quad w_2 = \omega_1 - v_1 i, \quad \left(0 < v_1 < \frac{\pi}{2}\right).$$

Da $\frac{dZ}{dw}$ für $w = \varepsilon\omega_1$ negativ wird, so erreicht Y, als Function von v betrachtet, für $v = v_1$ ein Minimum. Also ist $\Gamma_1 > 0$.



Wir wollen jetzt die Werthe von $v_1$ und $I'_1$ untersuchen für sehr kleine und sehr grosse Werthe von $\omega_1$.

A) Es sei $\lim \omega_1 = 0$.

Mit einem gewissen Grade der Annäherung können hier die Formeln in Art. 10 der „Form. u. Lehrs." angewendet werden, so dass die Gleichungen 1) und 2) in folgende übergehen:

$$1)\quad \left(\frac{\pi}{2\omega_1}\right)^2 \cdot \frac{1}{\sin^2 \frac{w_1 \pi}{2\omega_1}} - \frac{1}{2\omega_1} = 0,$$

$$2)\quad E\left\{\frac{\pi}{2\omega_1} \operatorname{cotg} \frac{w_1 \pi}{2\omega_1} + \frac{w_1}{2\omega_1}\right\} = -\frac{E}{2} - I'_1 i,$$

oder, da $\frac{w_1 \pi}{2\omega_1} = \frac{v_1 \pi i}{2\omega_1} - \frac{\pi}{2}$:

$$1)\quad \cos^2 \frac{v_1 \pi i}{2\omega_1} = \frac{\pi^2}{2\omega_1},$$

$$2)\quad I'_1 i = E\left\{\frac{\pi}{2\omega_1} \operatorname{tg} \frac{v_1 \pi i}{2\omega_1} - \frac{v_1 i}{2\omega_1}\right\}.$$

Aus 1) folgt

$$e^{\frac{v_1 \pi}{2\omega_1}} + e^{-\frac{v_1 \pi}{2\omega_1}} = 2\sqrt{\frac{\pi^2}{2\omega_1}},$$

$$e^{\frac{v_1 \pi}{2\omega_1}} = \sqrt{\frac{\pi^2}{2\omega_1}} \pm \sqrt{\frac{\pi^2}{2\omega_1} - 1} = \sqrt{\frac{\pi^2}{2\omega_1}}\left\{1 \pm \left(1 - \frac{\omega_1}{\pi^2} + \ldots\right)\right\}.$$

Damit die linke Seite unendlich gross werde, muss der zweiten Quadratwurzel ihr positiver Werth beigelegt werden. Also wird

$$\lim v_1 = \frac{\omega_1}{\pi} \ln \frac{2\pi^2}{\omega_1} = 0.$$

Da ferner $\lim \operatorname{tg} \frac{v_1 \pi i}{2\omega_1} = i$, so folgt aus 2):

$$\lim I'_1 = \frac{E}{2\omega_1}(\pi - v_1) = +\infty.$$

B) Es sei $\lim \omega_1 = \infty$.

Hier wird $e_1 - e_2$ unendlich klein, und die Betrachtung der durch die Function $\wp w$ vermittelten Abbildung (vergl. p. 10, Anm.) ergiebt, dass $\frac{e_1 + e_2}{2} - \wp\left(\omega_1 + \frac{\omega_3}{2}\right)$ eine unendlich kleine Grösse von höherer Ordnung wird. Da aber $\wp(\omega_1 + v_1 i) = -\frac{\eta_3}{\omega_3}$ zwischen den letzteren Grössen liegt, so folgt:

$$\lim v_1 i = \frac{\omega_3}{2}.$$

Ferner erhält man mit Rücksicht auf die Gleichung $\lim \operatorname{cotg} \frac{w_1}{2i} = -i$:

$$2)\quad \frac{E}{2i} \operatorname{cotg} \frac{w_1}{2i} = -\frac{E}{2} - \Gamma_1 i = -\frac{E}{2},$$

also

$$\lim \Gamma_1 = 0.$$

Damit ist bewiesen, dass $\Gamma_1$ in die Werthe $+\infty$ bez. 0 stetig übergeht, wenn $\omega_1$ in die Werthe 0 bez. $+\infty$ stetig übergeführt wird.

Dass $\Gamma_1$, als Function von $\omega_1$ betrachtet, für keinen endlichen Werth von $\omega_1$ unendlich gross werden kann, folgt aus der Gleichung 2) p. 18, denn $-\frac{\eta_3}{\omega_3}$ liegt zwischen den stets endlichen Werthen $e_1$ und $e_2$, und da $w_1$ auf der Strecke $-\omega_1 \ldots -\omega_1 + \omega_3$ liegt, so kann auch $\frac{\sigma' w_1}{\sigma w_1}$ nicht $\infty$ werden.

Wenn es gelingt, nachzuweisen, dass $\Gamma_1$ als Function von $\omega_1$ betrachtet für alle positiven Werthe von $\omega_1$ in Bezug auf $\omega_1$ differentiirbar, also stetig ist, so gehört sicher zu jedem Werthe von $\Gamma_1$ mindestens ein Werth von $\omega_1$; wenn diese Ableitung stets dasselbe (negative) Vorzeichen besitzt, so gehört zu jedem Werthe von $\Gamma_1$ ein und nur ein Werth von $\omega_1$. Wir wollen daher versuchen, die Grösse $\frac{\partial \Gamma_1}{\partial \omega_1}$ zu bilden.

Wenn man in 2) (p. 18) $\Gamma_1$ nach $\omega_1$ differentiirt, so hat man zu berücksichtigen, dass $\frac{\sigma' w_1}{\sigma w_1}$ in doppelter Weise von $\omega_1$ abhängt, da Periode und Argument von $\omega_1$ abhängen. Es wird

$$\frac{\partial \Gamma_1}{\partial \omega_1} = Ei \left\{ \frac{\partial}{\partial \omega_1} \frac{\sigma' w_1}{\sigma w_1} - w_1 \frac{\partial}{\partial \omega_1} \frac{\eta_3}{\omega_3} - \frac{\eta_3}{\omega_3} \frac{\partial w_1}{\partial \omega_1} \right\},$$

$$\frac{\partial \Gamma_1}{\partial \omega_1} = Ei \left\{ -\wp w_1 \frac{\partial w_1}{\partial \omega_1} + \frac{\partial}{\partial \omega_1} \frac{\sigma' w}{\sigma w}_{(w = w_1)} - w_1 \frac{\partial}{\partial \omega_1} \frac{\eta_3}{\omega_3} - \frac{\eta_3}{\omega_3} \frac{\partial w_1}{\partial \omega_1} \right\},$$

woraus nach 1) (p. 18):

$$\frac{\partial \Gamma_1}{\partial \omega_1} = Ei \left\{ \frac{\partial}{\partial \omega_1} \frac{\sigma' w}{\sigma w}_{(w = w_1)} - w_1 \frac{\partial}{\partial \omega_1} \frac{\eta_3}{\omega_3} \right\}.$$

Die Differentiationen lassen sich mit Hülfe der $\vartheta$-Functionen ausführen. Alle Functionen $\vartheta(V\tau)$ mit ihren Ableitungen genügen der partiellen Differentialgleichung

$$\alpha)\quad \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = \frac{1}{4\pi i} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial V^2},$$

aus der wir eine andere für $\frac{\vartheta'}{\vartheta}$ herleiten können. Es ist

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\frac{\vartheta'}{\vartheta} = \frac{\vartheta\frac{\partial \vartheta'}{\partial \tau} - \vartheta'\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau}}{\vartheta^2} = \frac{\vartheta\vartheta''' - \vartheta'\vartheta''}{4\pi i \vartheta^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial V}\frac{\vartheta'}{\vartheta} = \frac{\vartheta\vartheta'' - \vartheta'\vartheta'}{\vartheta^2},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial V^2}\frac{\vartheta'}{\vartheta} = \frac{\vartheta\vartheta''' - \vartheta'\vartheta''}{\vartheta^2} - 2\frac{\vartheta'}{\vartheta}\cdot\frac{\vartheta\vartheta'' - \vartheta'\vartheta'}{\vartheta^2}.$$

Daraus folgt allgemein:

$$\beta)\quad \frac{\partial}{\partial \tau}\frac{\vartheta'}{\vartheta} = \frac{1}{4\pi i}\left\{2\frac{\vartheta'}{\vartheta}\cdot\frac{\partial}{\partial V}\frac{\vartheta'}{\vartheta} + \frac{\partial^2}{\partial V^2}\frac{\vartheta'}{\vartheta}\right\}.$$

Hier wird in Folge der Gleichungen:

$$\omega_3 = \pi i,\ \tau = \frac{\omega_3}{\omega_1},\ \frac{\partial \omega_1}{\partial \tau} = -\frac{\omega_1^2}{\omega_3},\ \wp w_1 = -\frac{\eta_3}{\omega_3} = \frac{1}{2\omega_1} - \frac{\eta_1}{\omega_1},$$

wenn man nach ausgeführter Differentiation $V = \frac{w_1}{2\omega_1}$ setzt:

$$1)\quad \frac{\vartheta_1'(V|\tau)}{\vartheta_1(V|\tau)} = 2\omega_1\frac{\sigma' 2\omega_1 V}{\sigma\, 2\omega_1 V} - 4\eta_1\omega_1 V = 2\omega_1\frac{\sigma' w_1}{\sigma w_1} - 2\eta_1 w_1,$$

$$2)\quad \frac{\partial}{\partial V}\frac{\vartheta_1'(V|\tau)}{\vartheta_1(V|\tau)} = -4\omega_1^2\wp\, 2\omega_1 V - 4\eta_1\omega_1 = -2\omega_1,$$

$$3)\quad \frac{\partial^2}{\partial V^2}\frac{\vartheta_1'(V|\tau)}{\vartheta_1(V|\tau)} = -8\omega_1^3\wp' 2\omega_1 V = -8\omega_1^3\wp' w_1,$$

$$4)\quad \frac{\partial}{\partial \tau}\frac{\vartheta_1'(V|\tau)}{\vartheta_1(V|\tau)} = -\left\{2\omega_1\frac{\partial}{\partial \omega_1}\frac{\sigma' w}{\sigma w}_{(w=w_1)} + 2\frac{\sigma' w_1}{\sigma w_1} - 2w_1\wp w_1 - \frac{2w_1}{\omega_1}\left(2\eta_1 + \omega_1^2\frac{\partial}{\partial \omega_1}\frac{\eta_1}{\omega_1}\right)\right\}\frac{\omega_1^2}{\omega_3}.$$

Dies in die Gleichung $\beta$) eingeführt giebt nach Division mit $-\frac{2\omega_1^3}{\omega_3}$:

$$-\frac{w_1}{2\omega_1^2} - \frac{\eta_1}{\omega_1^2}w_1 + \frac{1}{\omega_1}\frac{\sigma' w_1}{\sigma w_1} + \frac{\partial}{\partial \omega_1}\frac{\sigma' w}{\sigma w}_{(w=w_1)} - w_1\frac{\partial}{\partial \omega_1}\frac{\eta_1}{\omega_1} = \frac{1}{\omega_1}\frac{\sigma' w_1}{\sigma w_1} - \frac{\eta_1}{\omega_1^2}w_1 + \wp' w_1,$$

und da $\frac{w_1}{2\omega_1^2} + w_1\frac{\partial}{\partial \omega_1}\frac{\eta_1}{\omega_1} = w_1\frac{\partial}{\partial \omega_1}\frac{\eta_3}{\omega_3}$, so folgt durch Einsetzen:

$$\frac{\partial \Gamma_1}{\partial \omega_1} = E i \wp' w_1, \quad (0 < \omega_1 < \infty).$$

Diese Ableitung kann für keinen Werth von $\omega_1$ unendlich gross werden, da $w_1$ auf der Strecke zwischen $-\omega_1$ und $-\omega_1 + \omega_3$ liegt. Wir wollen ihr Vorzeichen untersuchen, das sicher nirgends wechseln kann, weil $\wp' w_1$ nur für $w_1 = -\omega_1$ oder $w_1 = -\omega_1 + \omega_3$ verschwinden kann.

Aus $F(w) = E\left\{\frac{\sigma' w}{\sigma w} - \frac{\eta_3}{\omega_3}w\right\}$ folgt $F''(w) = -E\wp' w$, und da $F'(w_1) = 0$, so wird $F(w_1 + \varepsilon i) = F(w_1) + \frac{\varepsilon^2}{2}E\wp' w_1 + (\varepsilon^3)$. Für kleine reelle Werthe von $\varepsilon$ ist der Zuwachs von $F(w_1)$ positiv imaginär, weil Y für $\varepsilon = 0$ ein Minimum erreicht (vergl. p. 11, oben). Daher muss



$$\wp' w_1 = \wp'(-\omega_1 + v_1 i) = -\tfrac{1}{2} \frac{\wp'' \omega_1 \, \wp' v_1 i}{(\wp v_1 i - e_1)^2}$$

ebenfalls positiv imaginär sein, was auch durch Untersuchung der einzelnen Glieder des letzten Ausdrucks sich leicht ergiebt. Folglich ist

$$\frac{\partial \Gamma_1}{\partial \omega_1} < 0, \quad (0 < \omega_1 < \infty).$$

Es ist also $\Gamma_1$ eine stetige, endliche, eindeutige Function von $\omega_1$ für alle Werthe $0 < \omega_1 < \infty$, und ihre Ableitung ist überall negativ. Da für

$$\omega_1 = 0, \; \Gamma_1 = +\infty \text{ und für } \omega_1 = \infty, \; \Gamma_1 = 0$$

wird, so nimmt $\Gamma_1$ jeden positiven Werth einmal an, oder:

„In dem Falle III. (p. 17) ist es für jede gegebene Länge der Elektroden möglich, $\omega_1$ so zu bestimmen, dass durch die aufgestellte Function das ganze Periodenparallelogramm der w-Ebene auf die ganze Z-Ebene in der vorgeschriebenen Weise abgebildet wird.“ —

### IV. „Eine Elektrode erstrecke sich ins Unendliche und habe im Endlichen keinen oder nur einen Grenzpunkt.“ —

Fig. 12.

IV. A) „Die eine Elektrode stelle eine unbegrenzte Gerade dar.“ —

Eine Unendlichkeitsstelle von Z muss hier jedenfalls auf der Strecke $w = \frac{\omega_1}{2} + vi$, die der unendlich langen Elektrode entsprechen möge, liegen. Setzt man in der allgemeinen Function $u' = \frac{\omega_1}{2}$ und $w - \frac{\omega_1}{2} = \bar{w}$, so wird

$$Z = 2E\left\{\frac{\sigma' \bar{w}}{\sigma \bar{w}} - \frac{\eta_3}{\omega_3} \bar{w}\right\} + C.$$

Das ist dieselbe Function wie in III., nur dass 2E an die Stelle von E tritt.

Für $\bar{w} = vi$ wird

$$\frac{dZ}{d\bar{w}} = -2E\left\{\wp vi + \frac{\eta_3}{\omega_3}\right\},$$

d. h. stets positiv. Daher ist die diesen Werthen entsprechende Elektrode unbegrenzt. In III. entspricht ihr die Y-Axe. —

Fig. 13.

IV. B) „Die eine Elektrode erstrecke sich nach einer Seite ins Unendliche.“ —

Im vorigen Falle kam die eine Unendlichkeitsstelle von Z zum Wegfall. Nehmen wir jetzt wieder zwei an und setzen $u' = \frac{\omega_1}{2}$, so wird auch



$u'' = \omega_1 - u' = \frac{\omega_1}{2}$. Für $w = \frac{\omega_1}{2}$ wird daher Z von der zweiten, $\frac{dZ}{dw}$ von der dritten Ordnung $\infty$ gross. Dann hat $\frac{dZ}{dw}$ auch drei Nullstellen im Periodenparallelogramm, entsprechend den drei vorhandenen Elektrodenenden. Es wird

$$\frac{dZ}{dw} = C\frac{\sigma(w-w_1)\,\sigma(w-w_2)\,\sigma(w-w_3)}{\sigma^3\left(w-\frac{\omega_1}{2}\right)}$$

und nach Art. 16 und 17 der „Form. u. Lehrs.“:

$$Z = C_0' + C_0 w - C_1'\frac{\sigma'\left(w-\frac{\omega_1}{2}\right)}{\sigma\left(w-\frac{\omega_1}{2}\right)} - \tfrac{1}{2} C_1'' \wp\left(w-\frac{\omega_1}{2}\right).$$

Z(w) soll wieder die für z(w) aufgestellten Bedingungen 1) 2) 3) p. 8 erfüllen. Aus 1) und 2) folgt:

$$C_0 = -2E\frac{\eta_3}{\omega_3},\quad C_1' = -2E;$$

aus 3):
$$\Re\left[Z\left(+\frac{\omega_1}{2}+vi\right)\right] = \text{const.} - \tfrac{1}{2} A_1''\wp\left(vi - \frac{\omega_1}{2} \pm \frac{\omega_1}{2}\right).$$

Sollen beide Ausdrücke von v unabhängig sein, so muss $A_1'' = 0$ sein. Setzt man noch $w - \frac{\omega_1}{2} = W$, so ergiebt sich:

$$Z = 2E\left\{\frac{\sigma' W}{\sigma W} - \frac{\eta_3}{\omega_3}W\right\} - \frac{B_1'' i}{2}\wp W + C_0'',$$

$$\frac{dZ}{dW} = -2E\left\{\wp W + \frac{\eta_3}{\omega_3}\right\} - \frac{B_1'' i}{2}\wp' W.$$

$\frac{dZ}{dW}$ verschwindet an drei Stellen. Wir wollen zeigen, dass diese auf den Strecken liegen, die den Elektroden entsprechen. Es sei

1) $W = -\omega_1 + Vi$, dann ist $\frac{dZ}{dW}$ reell. Ferner wird für

$$Vi = 0,\qquad \frac{dZ}{dW} = -2E\left\{e_1 + \frac{\eta_3}{\omega_3}\right\},$$

$$Vi = +\omega_3,\quad \frac{dZ}{dW} = -2E\left\{e_2 + \frac{\eta_3}{\omega_3}\right\}.$$

Wenn $E > 0$, so haben diese Ausdrücke verschiedenes Vorzeichen; also liegen hier zwei Nullstellen.

2) Für $W = Vi$ ist $\frac{dZ}{dW}$ wieder reell. Ferner wird für

$$Vi = \pm\omega_3,\quad \frac{dZ}{dW} = -2E\left\{e_3 + \frac{\eta_3}{\omega_3}\right\} > 0,$$

$Vi = \pm\varepsilon i$ (wo $\varepsilon$ eine sehr kleine positive Grösse sei),

$$\frac{dZ}{dW} = \mp\frac{B_1''}{\varepsilon^3} + \left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right).$$

Dies wird je nach dem Vorzeichen von $B_1''$ und $V$ positiv und negativ unendlich. Es existirt also auf dieser Strecke nur eine Nullstelle von $\frac{dZ}{dW}$, die wir $W_3'$ nennen. Wenn man festsetzt, dass $B_1'' > 0$ sein soll, so wird $0 < V_3' < \frac{\omega_3}{i}$, und da $Z(\pm \varepsilon i) = \frac{B_1'' i}{2 \varepsilon^2} + \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$, so folgt, dass die Elektrode in der Richtung der positiven Y-Axe sich ins Unendliche erstreckt.

Wird $B_1''$ sehr klein, so rückt die Elektrode auch nach der andern Seite ins Unendliche fort. Dieser Fall geht dann in die Fälle IV. A) und III. über. — Die Grössen $W_k$ müssen der Bedingung genügen $W_1 + W_2 + W_3 = 0$. —

**V. „Die Elektroden liegen in gerader Linie und seien nicht beide unendlich lang." —**

Fig. 14. V. A) „Die eine Elektrode erstrecke sich nach einer Seite ins Unendliche." —

Es ist in der unter IV. B) gefundenen Function $E = 0$ zu setzen. Soll die Y-Axe mit der Geraden zusammenfallen, so wird

$$Z = -\frac{B_1'' i}{2} \wp W + B_0'' i, \quad \frac{dZ}{dW} = -\frac{B_1'' i}{2} \wp' W.$$

Für die Strecken $W = Vi$, $W = -\omega_1 + Vi$, denen die Elektroden, und $W = U$, $W = \pm \omega_3 + U$, denen zwei Strömungslinien entsprechen, wird Z rein imaginär.

Die Nullstellen von $\frac{dZ}{dW}$ sind $W_1 = -\omega_1$, $W_2 = -\omega_2$, $W_3' = \omega_3$. Daraus ergiebt sich die Lage der Elektrodenenden. Bestimmen wir $B_0''$ durch die Bedingung $Z_1 = 0$, so folgt:

$$Z_2 = \frac{B_1'' i}{2}(e_1 - e_2), \quad Z_3 = \frac{B_1'' i}{2}(e_1 - e_3),$$

$$Z = \frac{B_1'' i}{2}(e_1 - \wp W) = -\frac{B_1'' i}{2}\left(\frac{\sigma' W}{\sigma W}\right)^2.$$

Die Möglichkeit, die Constanten den Bedingungen der Aufgabe gemäss zu bestimmen, ist hier einfach zu beweisen. Die Figur der Z-Ebene ist, abgesehen vom Maassstabe, noch von einer Constanten, etwa dem Verhältniss

$$\frac{Z_2}{Z_3} = \frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3} = k'^2$$

abhängig, entsprechend der in $Z(w)$ verfügbaren Constanten $\omega_1$. Für jeden Werth $k'^2 < 1$ existirt aber ein und nur ein Werth von $\omega_1$. —

Hier ergeben sich leicht drei Unterfälle*):

A′) Wird $e_1 = e_2$, also $\omega_1 = \infty$, so reducirt sich die endliche Elektrode auf einen Punkt. Die Function wird Fig. 15.

$$Z = \frac{B_1'' i}{8 \sin^2 \frac{w}{2i}}. \quad \text{(Vergl. VII. A).}$$

A″) Wird $e_2 = e_3$, so rücken die Punkte $Z_2$ und $Z_3$ unendlich nahe an einander. Setzt man, gegen die bisherige Voraussetzung, $\omega_3 = \infty$, so wird Fig. 16.

$$Z = bi - \frac{B_1'' i}{2}\left(\frac{\pi}{2\omega_1}\right)^2 \frac{1}{\sin^2 \frac{w\pi}{2\omega_1}}.$$

Durch Vertauschung von Strömungs- und Spannungscurven erhält man die Figur des Falles A′).

A‴) Wird $e_1 = e_2 = e_3$, nimmt man also $\omega_1$ und $\omega_3$ unendlich gross an, so wird: Fig. 17.

$$Z = -\frac{B_1'' i}{2 w^2}.$$

Die endliche Elektrode wird punktförmig und rückt unendlich nahe an das Ende der anderen heran. (Vergl. VII. E). —

V. B) „Die Elektroden seien beide von endlicher Länge.“ — Fig. 18.

Dieser Fall ist aus V. A) durch Transformation mittelst reciproker Radien herzuleiten, wenn man den Transformationsmittelpunkt auf einem nicht den Elektroden angehörigen Stücke der Symmetrieaxe annimmt. Es treten hier in der Function, abgesehen von einer multiplicativen Constanten, zwei reelle Constanten auf, entsprechend der Periode $2\omega_1$ und der Lage des Transformationsmittelpunktes. Die relative Lage der Elektrodenenden hängt, abgesehen vom Maassstabe, ebenfalls von zwei Constanten ab.

Es ist nachzuweisen, dass die Constanten der Function stets so gewählt werden können, dass die letzteren Constanten beliebig vorgeschriebene Werthe erhalten.

Nehmen wir den Transformationsmittelpunkt ($Z' = 0$) auf dem äusseren Theil der Symmetrieaxe in der Entfernung $ai$ vom Nullpunkte an ($a > 0$), so bleibt die Reihenfolge der Elektrodenenden unverändert.

*) Form. u. Lehrs., Art. 10.

Die Function wird:

$$z = \frac{1}{Z + ai} = \frac{1}{Z'} = \frac{1}{\frac{B_1''i}{2}(e_1 - \wp W) + ai}.$$

Ferner wird $z_k = \frac{1}{Z_k + ai} = \frac{1}{Z_k'}$ $(k = 1, 2, 3)$, $z_4 = 0$.

Die Figur der z-Ebene ist, abgesehen vom Maassstabe, bestimmt durch die beiden Verhältnisse:

$$A_1 = \frac{z_3 - z_1}{z_4 - z_3},\ A_2 = \frac{z_3 - z_2}{z_4 - z_3} \text{ oder } A_1 = \frac{Z_3' - Z_1'}{Z_1'},\ A_2 = \frac{Z_3' - Z_2'}{Z_2'}.$$

Daraus folgt:
$$\frac{Z_1'}{Z_3'} = \frac{1}{1 + A_1},\ \frac{Z_2'}{Z_3'} = \frac{1}{1 + A_2}.$$

Durch diese beiden Verhältnisse ist nun auch die Figur der Ebene $Z'$, abgesehen vom Maassstabe, bestimmt. Wie früher ist hier:

$$k^2 = \frac{Z_3' - Z_2'}{Z_3' - Z_1'} = \frac{A_2}{A_1} \cdot \frac{1 + A_1}{1 + A_2} = \frac{1 + \frac{1}{A_1}}{1 + \frac{1}{A_2}},$$

woraus $\omega_1$ eindeutig bestimmbar ist. Denn da $A_1 \geqq A_2 \gtrless 0$, so ist $1 \geqq k^2 \gtrless 0$.

Nehmen wir $Z_3'$ und $B_1''$ willkürlich an, so ergiebt sich aus obigen Gleichungen $Z_1'$ und $Z_2'$, und a ergiebt sich aus der Gleichung:

$$Z_1 + Z_2 + Z_3 = Z_1' + Z_2' + Z_3' - 3ai = 3e_1 \frac{B_1''i}{2}.$$

Die abbildende Function kann für diesen Fall direct aus dem allgemeinen (p. 12) hergeleitet werden, wenn dort $E = 0$ gesetzt wird. In allen Fällen, wo die Elektroden auf einer Geraden liegen, ist nicht nur die Ableitung der die Abbildung vermittelnden Function, sondern die abbildende Function selbst eine elliptische Function.

Fig. 19. B') „Die Elektroden seien gleich lang." —

Dieser Fall folgt aus dem vorigen, wenn $z_1 - z_2 = z_3$ gesetzt wird. Er ist ein specieller Fall des Falles II. Wird dort $E = 0$ gesetzt, so ergiebt sich:

$$Z = B_1'i\left\{\frac{\sigma'(w - \omega_1)}{\sigma(w - \omega_1)} - \frac{\sigma' w}{\sigma w} + \eta_1\right\}.$$

Z hat die Eigenschaft, dass $Z(w + \omega_1) = -Z(w)$, also dass $Z^2$ eine elliptische Function von $w$ mit den Perioden $\omega_1$, $2\omega_3$ ist. Wir erhalten eine einfachere Darstellung durch Einführung der halben reellen Periode, die für die folgenden Functionen ausschliesslich gelten soll.

Für $w = 0$ bez. $w = \pm \omega_3$ wird $Z^2$ von der zweiten Ordnung $\infty$ gross bez. $\infty$ klein. Daraus folgt:

$$Z^2 = -\frac{B_1'^2}{w^2} + \ldots = B_1'^2 \frac{\sigma(w-\omega_3)\,\sigma(w+\omega_3)}{\sigma^2\omega_3\,\sigma^2 w}.$$

oder durch einfache Umformung*):

$$Z = -\frac{B_1' i}{w} + \ldots = -B_1' i \frac{\sigma_3 w}{\sigma w} = -B_1' i \sqrt{\wp w - e_3} \quad [\omega_1, 2\omega_3],$$

oder auch**):

$$Z = bi \sin \operatorname{am} (\sqrt{e_1 - e_3}(w + \omega_3), k) \quad [\omega_1, 2\omega_3],$$

wo auch die Grössen $e_\lambda$ und k sich auf die veränderten Perioden beziehen.

Es wird
$$Z_1 = -Z_4 = -B_1' i \sqrt{e_1 - e_3},$$
$$Z_2 = -Z_3 = -B_1' i \sqrt{e_2 - e_3}.$$

Die Figur der Z-Ebene ist, abgesehen vom Maassstabe, durch eine Constante bestimmt, etwa durch das Verhältniss $\frac{Z_4 - Z_3}{Z_4 + Z_3} = l_1$; ist dies gegeben, so ist die Periode $\omega_1$ eindeutig bestimmbar.***) —

V. C) „Die eine Elektrode stelle die Verlängerungen einer endlichen Strecke dar.“ — Fig. 20.

Das Strömungsnetz kann man für diesen Fall aus dem für V. B) erhalten, wenn man Spannungs- und Strömungscurven mit einander vertauscht. Es geht dann die Strecke $z_2 z_3$ in die eine und der äussere Theil der Strecke $z_1 z_4$ in die andere Elektrode über. Soll die abbildende Function direct aus der des Falles V. A) durch Transformation mittelst reciproker Radien hergeleitet werden, so ist a so zu wählen, dass der Transformationsmittelpunkt in das Innere einer der beiden Elektroden fällt. (Vergl. VIII. B).

Alle zu V. gehörigen Fälle können wieder durch reciproke Radien aus B′) und C) hergeleitet werden. Da in B′) eine geradlinige Spannungscurve, in C), wenn eine Symmetrieaxe hinzukommt, eine geradlinige Strömungscurve auftritt, so existirt in allen hierher gehörigen Fällen in jeder der beiden Curvenschaaren ein voller Kreis. —

## VI. „Die eine Elektrode werde punktförmig.“ —

Wenn hier die reelle Periode der allgemeinen Function endlich bliebe, so müsste etwa der unendlich langen Geraden $W = -\omega_1 + Vi$ ein einziger Punkt

*) Form. u. Lehrs., Art. 18. — **) Art. 23 und 26. — ***) Art. 45.

der Z-Ebene entsprechen, d. h. Z wäre überhaupt constant. Also wird in allen hierher gehörigen Fällen

$$\omega_1 = \infty .$$

Fig. 21, 22. VI. A) „Die zweite Elektrode sei nach einer Richtung unbegrenzt." —

Dieser Fall ist ein specieller von IV. B). Es wird*):

$$Z = -E i \cot g \frac{W}{2i} + \frac{B_1'' i}{8 \sin^2 \frac{W}{2i}} + c,$$

$$\frac{dZ}{dW} = \frac{1}{8 \sin^2 \frac{W}{2i}} \left(4E - B_1'' \cot g \frac{W}{2i}\right).$$

Durch Einführung der Exponentialfunctionen ergiebt sich:

$$\lim_{\omega_1 = \infty} Z(-\omega_1 + Vi) = Z_1 = Z_2 = -E + c, \quad \lim_{\omega_1 = \infty} \frac{dZ}{dW}(-\omega_1 + Vi) = 0.$$

Beide sind also von V unabhängig, d. h. der unendlich fernen Geraden $W = -\omega_1 + Vi$ entspricht ein einziger Punkt, nämlich jene Elektrode.

Setzt man $c = 0$, so fällt die punktförmige Elektrode in die X-Axe, die andere in die Y-Axe.

Die zweite Nullstelle von $\frac{dZ}{dW}$ ist aus der Gleichung zu bestimmen:

$$\cot g \frac{V_3}{2} = \frac{4E}{B_1''},$$

die stets einen solchen Werth $V_3$ ergiebt, dass $-\pi \leq V_3 \lesseqgtr \pi$.

Durch Einsetzen findet man

$$Z_3 = Y_3 i = -\frac{4E^2 i}{B_1''} + \frac{B_1'' i}{8}\left\{1 + \frac{16E^2}{B_1''^2}\right\} = i\left\{\frac{B_1''}{8} - \frac{2E^2}{B_1''}\right\}.$$

Die Figur der Z-Ebene hängt, abgesehen vom Maassstabe, noch von einer Constanten, etwa dem Verhältniss

$$\frac{Y_3}{E} = \frac{B_1''}{8E} - \frac{2E}{B_1''} = \cot g \beta$$

ab, wo $\beta$ den Winkel zwischen der negativen Y-Axe und der Strecke $Z_3 Z_1$ bedeutet. Ist E und $\beta$ gegeben, so folgen aus der Gleichung die Werthe:

$$B_1'' = 4E \cot g \frac{\beta}{2} \text{ oder } B_1'' = -4E \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}.$$

---

*) Form. u. Lehrs., Art. 10.

Da stets $0 \leq \beta \gtrless \pi$, so ist nur der erste (positive) Werth zulässig, wenn die unendlich lange Elektrode in der Richtung der positiven Y-Axe sich ins Unendliche erstrecken soll. Durch Vergleichung folgt $V_3 = \pi - \beta$.

Soll $Z_1$ auf der negativen X-Axe liegen, so entspricht bei Abbildung durch die Function

$$Z = -Ei\left\{\operatorname{cotg}\frac{W}{2i} + \frac{\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}}{2\sin^2\frac{W}{2i}}\right\}$$

der Z-Ebene der in der Halbebene $\Re(W) < 0$ liegende Streifen. —

VI. B) „Die zweite Elektrode stelle eine unbegrenzte Gerade dar." — Fig. 23.

Setzen wir in A) $Y_3 = -\infty$, also $\beta = \pi$, so wird

$$Z = \frac{E}{i}\operatorname{cotg}\frac{W}{2i}.$$

Man findet

$$X = \frac{Ei\sin Ui}{\cos V - \cos Ui}, \quad Y = \frac{E\sin V}{\cos V - \cos Ui}$$

und durch Elimination von U bez. V:

$$X^2 + Y^2 + 2EY\operatorname{cotg} V = E^2 \qquad \text{(Strömungscurven)},$$
$$X^2 + Y^2 - 2EXi\operatorname{cotg} Ui = -E^2 \quad \text{(Spannungscurven)}.$$

Das giebt eine Steinersche Kreisschaar. Dasselbe Strömungsnetz wird von zwei punktförmigen in Bezug auf die Y-Axe symmetrisch liegenden Elektroden geliefert. —

VI. C) „Die zweite Elektrode sei von endlicher Länge." — Fig. 24, 62.

Dieser Fall ist aus A) durch Transformation mittelst reciproker Radien herzuleiten, wenn man den Transformationsmittelpunkt auf der Verlängerung der unendlich langen Elektrode annimmt. Setzt man

$$z = \frac{A}{Z - ai},$$

wo A und a reell sind, so erstreckt sich die nicht punktförmige Elektrode von $z = 0$ bis $z = y_3 i$.

Wird $z_1 = -E + y_1 i$ gesetzt, so ist nachzuweisen, dass die Constanten A, a, $Y_3$ stets so gewählt werden können, dass die beiden die Figur der z-Ebene bestimmenden Constanten $y_1$ und $y_3$ beliebig vorgeschriebene Werthe erhalten.



Für jene drei Constanten bestehen die Gleichungen:

$$\begin{cases} y_3 i = \dfrac{A}{Y_3 i - a i}, \\ -E + y_1 i = \dfrac{A}{-E - a i}, \end{cases}$$

oder

$$\begin{cases} A = a y_3 - Y_3 y_3 = E^2 + a y_1, \\ E a = E y_1, \end{cases}$$

und da $E > 0$:

$$\begin{cases} a = y_1, \\ A = E^2 + y_1{}^2, \\ Y_3 = \dfrac{y_3 y_1 - E^2 - y_1{}^2}{y_3}. \end{cases}$$

Die Abbildung wird daher in der vorgeschriebenen Weise durch die Function

$$z = \frac{E^2 + y_1{}^2}{Z - y_1 i}$$

geleistet, wenn das Elektrodenende der Z-Ebene gemäss der Gleichung

$$Y_3 = y_1 - \frac{E^2 + y_1{}^2}{y_3}$$

gewählt wird.

Die Function kann auch aus der allgemeinen (p. 12) hergeleitet werden, wenn in dieser $\omega_1 = \infty$ gesetzt wird. Substituiren wir vorher:

$$w = W + \frac{\omega_1}{2}, \quad u' = U' + \frac{\omega_1}{2},$$

so wird:

$$Z = \frac{E + B_1{}' i}{2i} \operatorname{cotg} \frac{W + U'}{2i} + \frac{E - B_1{}' i}{2i} \operatorname{cotg} \frac{W - U'}{2i} + c.$$

Für $W = \pm U'$ wird $Z = \infty$.

Ferner ist:

$$\frac{dZ}{dW} = \frac{E + B_1{}' i}{4 \sin^2 \frac{W + U'}{2i}} + \frac{E - B_1{}' i}{4 \sin^2 \frac{W - U'}{2i}}.$$

Es wird für $W = 0$, $\quad \dfrac{dZ}{dW} = \dfrac{E}{2 \sin^2 \frac{U'}{2i}} = \dfrac{-2E}{\left(e^{\frac{U'}{2}} - e^{-\frac{U'}{2}}\right)^2}$;

für $W = \pm \pi i$, $\quad \dfrac{dZ}{dW} = \dfrac{E}{2 \cos^2 \frac{U'}{2i}} = \dfrac{2E}{\left(e^{\frac{U'}{2}} + e^{-\frac{U'}{2}}\right)^2}$.

Da diese Werthe, wenn $E > 0$, verschiedenes Vorzeichen haben, so existirt auf den Strecken $W = 0 \ldots \pm \pi i$ je eine Nullstelle von $\frac{dZ}{dW}$, entsprechend den beiden Elektrodenenden. —

VI. D) „Die zweite Elektrode stelle die Verlängerungen einer endlichen Strecke dar.“ — Fig. 25.

Dieser Fall lässt sich aus A) genau so wie der vorhergehende ableiten, wenn der Transformationsmittelpunkt auf der unendlich langen Elektrode angenommen wird. Die abbildende Function und die Gleichungen für die Constanten sind genau dieselben. Da jedoch hier $Y_3 < a'$ oder $Y_3 < y_1$, so muss $y_3 > 0$ werden, während im vorigen Falle $y_3 < 0$ war. (Vergl. hierzu VIII. C).

Kommt in C) oder D) eine Symmetrieaxe hinzu, so tritt eine geradlinige Strömungscurve auf. Da aus jedem dieser beiden Fälle alle andern in VI. durch reciproke Radien herzuleiten sind, so ist in allen diesen je eine Strömungscurve kreisförmig. —

**VII. „Die Elektroden liegen in gerader Linie und die eine sei punktförmig.“** —

Hier ist in den Functionen der allgemeineren Fälle $E = 0$ und $\omega_1 = \infty$ zu setzen. Der Radius der kreisförmigen Strömungscurve kann $\infty$ gross und $\infty$ klein werden, der der kreisförmigen Spannungscurve ist $\infty$ klein.

VII. A) „Die zweite Elektrode sei nach einer Richtung unbegrenzt.“ — Fig. 15.

Dann folgt aus VI. A) (vergl. V. A'):

$$Z = \frac{B_1'' i}{8 \sin^2 \frac{W}{2i}}, \quad \frac{dZ}{dW} = -\frac{B_1''}{8} \frac{\operatorname{cotg} \frac{W}{2i}}{\sin^2 \frac{W}{2i}}.$$

Aus $\frac{dZ}{dW} = 0$ erhält man:

$$W_1' = W_2' = -\infty = -\omega_1, \quad W_3' = \pm \pi i = \pm \omega_3,$$

und durch Einsetzen: $Z_1 = Z_2 = 0$, $Z_3 = \frac{B_1'' i}{8}$ und

$$Z = \frac{Z_3}{\sin^2 \frac{W}{2i}}. \text{ —}$$

VII. B) „Die zweite Elektrode sei von endlicher Länge.“ — Fig. 26, 63.

Aus VI. C) folgt für $c = 0$:

$$Z = \frac{B_1'}{2} \left\{ \operatorname{cotg} \frac{W + U'}{2i} - \operatorname{cotg} \frac{W - U'}{2i} \right\},$$

$$\frac{dZ}{dW} = \frac{B_1' i}{4} \left\{ \frac{1}{\sin^2 \frac{W + U'}{2i}} - \frac{1}{\sin^2 \frac{W - U'}{2i}} \right\}.$$

Aus $\frac{dZ}{dW} = 0$ ergeben sich die Werthe

$$W_1' = W_2' = -\infty = -\omega_1,\ W_3' = +\pi i = \pm\omega_3,\ W_4' = 0;$$

daraus

$$Z_1 = Z_2 = 0,\ Z_3 = -B_1' \operatorname{tg}\frac{U'}{2i},\ Z_4 = B_1' \operatorname{cotg}\frac{U'}{2i}.$$

Sollen $Y_3$ und $Y_4$ positiv sein, so muss $B_1'$ positiv sein.

Die Figur der Z-Ebene ist, abgesehen vom Maassstabe, durch eine Constante völlig bestimmt, etwa durch das positive Verhältniss

$$\frac{Z_3}{Z_4} = -\operatorname{tg}^2\frac{U'}{2i} = a^2.$$

Z enthält noch eine willkürliche Constante U', die für ein gegebenes a aus der Gleichung zu bestimmen ist:

$$\frac{1-e^{U'}}{1+e^{U'}} = a \text{ oder } e^{U'} = \frac{1-a}{1+a}.$$

Es ist $0 \leq a \lesseqgtr 1$ und $0 \geq U' \gtreqless -\infty$. Die Grenzfälle sind besonders zu untersuchen. — Durch Vertauschung von Spannungs- und Strömungscurven erhält man den durch Fig. 56 angedeuteten Fall. —

Fig. 27. VII. C) „Die eine Elektrode sei von endlicher Länge, die andere liege im Unendlichen.“ —

Man kann diesen Fall durch Transformation mittelst reciproker Radien aus A) herleiten, indem man setzt:

$$z = \alpha + \frac{\beta}{Z}.$$

$\alpha$ und $\beta$ wollen wir so bestimmen, dass für $Z = \infty$, $z = Ai$,
für $Z = Z_3$, $z = -Ai$ wird.

Daraus folgen die Gleichungen:

$$\begin{cases} Ai = \alpha, \\ -Ai = \alpha + \frac{\beta}{Z_3} \text{ oder } \beta = -2Ai \,.\, Z_3, \end{cases}$$

also

$$z = Ai\left(1 - 2\sin^2\frac{W}{2i}\right) = Ai\cos Wi = Ai\frac{e^{W} + e^{-W}}{2}.$$

Durch diese Abbildung erhält man bekanntlich ein System confocaler Ellipsen und Hyperbeln, von denen erstere die Spannungs-, letztere die Strömungscurven darstellen. —

VII. D) „Die eine Elektrode sei nach einer Richtung unbegrenzt, die andere liege im Unendlichen.“ — Fig. 28.

Durch die Substitution $z = Z - Ai$, $W = \mathfrak{w} - \pi i$ folgt aus C):

$$Z = Ai\,(1 - \cos \mathfrak{w} i) = 2\,Ai \sin^2 \frac{\mathfrak{w} i}{2}.$$

Hier wird für $\mathfrak{w} = 0$ auch $Z = 0$ und $\frac{dZ}{d\mathfrak{w}} = 0$, d. h. es liegt der Nullpunkt der Z-Ebene in dem einen Elektrodenende. Den vorliegenden Fall können wir nun als Grenzfall des vorigen für $\lim A = \infty$ betrachten. Damit Z endlich bleibe, muss $\mathfrak{w}$ sehr klein werden, so dass wir entwickeln können:

$$Z = -\frac{Ai}{2}\mathfrak{w}^2 + (\mathfrak{w}^4).$$

Die $\mathfrak{w}$-Ebene können wir durch sehr starke Vergrösserung des Maassstabes auf eine Ebene w abbilden, indem wir setzen

$$\frac{A\mathfrak{w}^2}{2} = a^2 w^2,$$

wo a eine reelle endlich bleibende Constante bedeutet. Also wird im Grenzfalle:

$$Z = -a^2 i w^2.$$

Der Parallelstreifen ist in die Halbebene $\Re(w) < 0$ übergegangen. Die Abbildung ergiebt bekanntlich für Spannungs- und Strömungscurven eine Doppelschaar confocaler Parabeln. —

VII. E) „Die eine Elektrode sei nach einer Richtung unbegrenzt, die andere rücke unendlich nahe an das Ende der ersteren heran.“ — Fig. 17.

Durch Transformation mittelst reciproker Radien folgt aus D):

$$z = \frac{1}{Z} = \frac{i}{a^2 w^2}.$$

Dreht man die Figur der z-Ebene um 180°, so werden in diesen beiden Fällen Spannungs- und Strömungscurven mit einander vertauscht. Aus

$$x + yi = \frac{i}{a^2(u + vi)^2}$$

folgt:

$$y = \frac{u^2 - v^2}{a^2(u^2 + v^2)^2}, \quad x = \frac{2uv}{a^2(u^2 + v^2)^2}.$$

Für $\infty$ grosse Werthe von u oder v wird y von der zweiten, x von der dritten Ordnung $\infty$ klein. Daher besitzen die Curven im Nullpunkte Spitzen erster Art, deren Tangente die y-Axe bildet. (Vergl. V. A‴). —





Fig. 29, 30.

## VIII. „Die eine Elektrode stelle die Verlängerungen einer endlichen Strecke dar." —

Nimmt man an, den Elektroden entsprechen die Strecken $w = -\omega_1 + vi$ und $w = vi$, so möge für zwei Stellen der letzteren z von der ersten Ordnung, also $\frac{dz}{dw}$ von der zweiten Ordnung unendlich gross werden. Dann wird

$$\frac{dz}{dw} = C \frac{\sigma(w-w_1)\,\sigma(w-w_2)\,\sigma(w-w_3)\,\sigma(w-w_4)}{\sigma^2(w-w')\,\sigma^2(w-w'')}$$

und

$$z = C_0' + C_0 w + C_1 \ln \sigma(w-w') - C_1 \ln \sigma(w-w'') - C_1' \frac{\sigma'(w-w')}{\sigma(w-w')} - C_2' \frac{\sigma'(w-w'')}{\sigma(w-w'')}.$$

Durch Verschiebung des Nullpunktes parallel der Axe des Imaginären kann man stets erreichen, dass $w'$ und $w''$ conjugirt werden und dass $0 < w' \leqq \frac{\pi}{2}$ wird.

Damit die Beziehung eindeutig werde, muss $C_1 = 0$ sein. z muss die Bedingungen 1) 2) 3) (p. 8) erfüllen, wobei nur $vi$ durch $-\frac{\omega_1}{2} + vi$ zu ersetzen ist. Aus 1) und 2) folgt:

$$C_0 = -2E\frac{\eta_3}{\omega_3},\quad C_1' + C_2' = -2E;$$

3) ist dann von selbst erfüllt. Also wird

$$z = C_0' - 2E\frac{\eta_3}{\omega_3}w - A_1' \frac{\sigma'(w-v'i)}{\sigma(w-v'i)} - A_2' \frac{\sigma'(w+v'i)}{\sigma(w+v'i)},$$

$$\frac{dz}{dw} = -2E\frac{\eta_3}{\omega_3} + A_1'\wp(w-v'i) + A_2'\wp(w+v'i),$$
$$(A_1' + A_2' = -2E).$$

Für $w = +v'i + \varepsilon i$ wird $\frac{dz}{dw} = -\frac{A_1'}{\varepsilon^2} + \ldots$

Für $w = -v'i + \varepsilon i$ wird $\frac{dz}{dw} = -\frac{A_2'}{\varepsilon^2} + \ldots$

Nun soll je eine Nullstelle von $\frac{dz}{dw}$ auf der Strecke $-v'i \ldots +v'i$ und auf der Strecke $v'i \ldots 2\omega_3 - v'i$ liegen, damit sie durch eine Unendlichkeitsstelle getrennt werden, wie es die Lage der Elektrodenenden erfordert. Also muss $\frac{dz}{dw}$ an den Stellen $v'i$ und $-v'i$ entgegengesetzte $\infty$ grosse Werthe annehmen, d. h. $A_1'$ und $A_2'$ haben entgegengesetztes Vorzeichen.

Durch die Substitution $\bar{z} = -z$, $\bar{w} = -w$ wechseln $A_1'$ und $A_2'$ ihre Stellen; daher kann man festsetzen: $A_1' > 0$, $A_2' < 0$.



Nun ergeben sich mit Rücksicht auf den p. 9 bewiesenen Hülfssatz die Werthsysteme:

$$1)\quad w = 0, \qquad \frac{dz}{dw} = -2E\left\{\wp v'i + \frac{\eta_3}{\omega_3}\right\} > 0,$$

$$2)\quad w = v'i, \qquad \frac{dz}{dw} = -\infty,$$

$$3)\quad w = \omega_3, \qquad \frac{dz}{dw} = -2E\left\{\wp(\omega_3 - v'i) + \frac{\eta_3}{\omega_3}\right\} > 0,$$

$$4)\quad w = \omega_2, \qquad \frac{dz}{dw} = -2E\left\{\wp(\omega_2 + v'i) + \frac{\eta_3}{\omega_3}\right\} > 0,$$

$$5)\quad w = \omega_1 - v'i, \; \frac{dz}{dw} = -A_1'\left\{e_1 - \wp(\omega_1 + 2v'i)\right\} - 2E\left\{e_1 + \frac{\eta_3}{\omega_3}\right\} < 0,$$

$$6)\quad w = \omega_2 - v'i, \; \frac{dz}{dw} = -A_1'\left\{e_2 - \wp(\omega_2 + 2v'i)\right\} - 2E\left\{e_2 + \frac{\eta_3}{\omega_3}\right\} > 0.$$

Daher muss je eine Nullstelle von $\frac{dz}{dw}$ auf den vier Strecken liegen zwischen $0 \ldots v'i \ldots \omega_3$ und $-\omega_2 \ldots -\omega_1 - v'i \ldots \omega_3 - \omega_1 - v'i$.

Aehnlich wie p. 7, 8 und 11 ergeben sich hier die Gleichungen:

$$\Sigma \frac{\sigma'(v'i - w_k)}{\sigma(v'i - w_k)} = \Sigma \frac{\sigma'(v'i + w_k)}{\sigma(v'i + w_k)} = 2\frac{\sigma' 2v'i}{\sigma 2v'i},$$

$$\frac{1}{A_1'} \Pi \sigma(v'i - w_k) = \frac{1}{A_2'} \Pi \sigma(v'i + w_k) = \frac{1}{C} \sigma^2 2v'i,$$

$$(k = 1, .. 4).$$

Mit Rücksicht auf die Gleichung

$$w_1 + w_2 + w_3 + w_4 = 2w' + 2w'' = 0$$

kann man setzen

$$w_k = w_k' \; (k = 1, 2, 3), \; w_4 = w_4' + 2\omega_1.$$

Daraus lässt sich wieder der Schwerpunkt der vier Elektrodenenden berechnen. Es wird

$$\frac{1}{4} \cdot \sum_{k=1}^{4} z_k = C_0' + E(\tfrac{1}{2} - 2\eta_1) + \frac{A_1' - A_2'}{2}.$$

Die Untersuchung der beiden ins Unendliche sich erstreckenden Strömungslinien zeigt, dass ihre Asymptoten parallel sind der Axe des Reellen und im Allgemeinen nicht zusammenfallen.

Die Eindeutigkeit der durch die abbildende Function vermittelten Beziehung zwischen dem halben Periodenparallelogramm der w-Ebene und der ganzen z-Ebene folgt einfach aus Betrachtung der Charakteristik.

Fig. 31, 64. VIII. A) „Es sei eine zu den Elektroden senkrechte Symmetrieaxe vorhanden.“ —

Dann ist zu vermuthen, dass deren Theile die beiden sich ins Unendliche erstreckenden Strömungslinien darstellen werden, denen in der w-Ebene die durch die Punkte $\pm v'i$ gehenden Parallelen zur u-Axe entsprechen. Durch Spiegelung von $-v'i$ gegen die durch $+v'i$ gehende Gerade kommt man zum Punkt $3v'i$, dem wieder der Punkt $z = \infty$ entsprechen muss. $3v'i$ muss also congruent sein zu $+v'i$ oder $-v'i$. Da nun nach der Annahme $0 < |v'i| \leqq \frac{\omega_3}{2}$, so liefert die Gleichung $3v'i = +v'i + 2k\omega_3$ den allein zulässigen Werth $v'i = \frac{\omega_3}{2}$.

Für $w = -\omega_1$ und $w = -\omega_2$ wird $\frac{dz}{dw} = -2E\left\{\wp\left(\omega_1 + \frac{\omega_3}{2}\right) + \frac{\eta_3}{\omega_3}\right\} > 0$.

Für $w = -\omega_1 - \frac{\omega_3}{2}$ wird $\frac{dz}{dw} = -A_1'\left(e_1 - e_2\right) - 2E\left(e_1 + \frac{\eta_3}{\omega_3}\right) < 0$.

Also liegt hier $w_1$ auf der Strecke $-\omega_1 \ldots -\omega_1 - \frac{\omega_3}{2}$. Da die Elektrodenenden der z-Ebene zu den erwähnten Strömungslinien symmetrisch liegen, so müssen auch die Nullstellen von $\frac{dz}{dw}$ zu den entsprechenden Geraden symmetrisch liegen. —

Fig. 20. VIII. B) „Die Elektroden fallen in eine Gerade.“ —

Da hier $A_1' + A_2' = -2E = 0$, so wird die abbildende Function

$$z = C_0' + A_1'\left\{\frac{\sigma'(w+v'i)}{\sigma(w+v'i)} - \frac{\sigma'(w-v'i)}{\sigma(w-v'i)}\right\} = C_0'' - A_1'\frac{\wp' v'i}{\wp w - \wp v'i}$$

selbst schon eine elliptische Function von w. Da $\frac{dz}{dw} = A_1'\frac{\wp' w\, \wp' v'i}{(\wp w - \wp v'i)^2}$, so werden die vier Nullstellen von $\frac{dz}{dw}$:

$$-\omega_1, \quad -\omega_2, \quad \omega_3, \quad 0,$$

woraus die Lage der Elektrodenenden durch Einsetzen direct berechnet werden kann. (Vergl. V. C). —

Fig. 32. VIII. B') „Es trete noch eine zu den Elektroden senkrechte Symmetrieaxe auf.“ —

Hier ist $$v'i = \frac{\omega_3}{2}.$$

$z - C_0'$ nimmt bei Vermehrung von $w$ um $\omega_3$ den entgegengesetzten Werth an. Es kann hier ebenso die halbe imaginäre Periode eingeführt werden, wie im Falle V. B'), aus dem dieser durch Vertauschung von Spannungs- und Strömungscurven hervorgeht, die halbe reelle Periode. —

VIII. C) „Die zweite Elektrode sei punktförmig.“ — Fig. 25.

Es wird $\omega_1 = \infty$ und

$$z = c - \frac{A_1'}{2i} \operatorname{cotg} \frac{w - v'i}{2i} - \frac{A_2'}{2i} \operatorname{cotg} \frac{w + v'i}{2i} \quad (A_1' + A_2' = -2E). \quad \text{(Vergl. VI. D).} —$$

VIII. C'') „Beide liegen ausserdem in gerader Linie.“ — Fig. 33.

Dann ist $E = 0$, also

$$z = c + \frac{A_1'}{2i} \left\{ \operatorname{cotg} \frac{w + v'i}{2i} - \operatorname{cotg} \frac{w - v'i}{2i} \right\}.$$

Aus VI. D) würde man erhalten

$$z = \frac{y_2^2}{Z - y_2 i} \quad \left( Y_1 = y_2 - \frac{y_2^2}{y_1} \right),$$

wo Z die Function in VI. A) bedeutet. —

## IX. „Beide Elektroden erstrecken sich gleichzeitig ins Unendliche.“ —

Hier sind vier besondere Fälle aus einander zu halten. Es können nämlich im Endlichen zwei, drei oder vier Begrenzungspunkte vorhanden sein, und wenn zwei auftreten, können die Elektroden nach derselben oder nach entgegengesetzten Richtungen sich ins Unendliche erstrecken.

Transformirt man die Elektroden mittelst reciproker Radien ganz ins Endliche, so gehen sie in Kreisbogen über, die sich berühren. Wenn man sich daher die Ebenen längs der Elektroden aufgeschnitten denkt, so erhält man einfach zusammenhängende Bereiche. Diese können auf eine Halbebene $\Re\left(\frac{\zeta}{i}\right) > 0$ so abgebildet werden, dass der positiven $\zeta$-Axe die Elektroden mit kleinerer, der negativen die mit grösserer Abscisse entsprechen.

Den Elektrodenenden der z-Ebene entsprechen dann Nullstellen von $\frac{dz}{d\zeta}$. Da an diesen Stellen ($\zeta_k$) überall den Winkeln von 180° der $\zeta$-Ebene Winkel von 360° der z-Ebene entsprechen, so darf z, nach Potenzen von $\zeta - \zeta_k$ entwickelt, kein Glied von niederer als der zweiten Ordnung, also $\frac{dz}{d\zeta}$ kein von Null verschiedenes constantes Glied enthalten.

Um das Verhalten von $\frac{dz}{d\zeta}$ für die unendlich fernen Stellen der z-Ebene zu untersuchen, hat man die Winkel zu vergleichen, die an den entsprechenden Stellen der verschiedenen Ebenen eintreten. Es wird für



Fig. 34, 65. A) $\zeta = \infty$, z proportional $\zeta^2$, also $\frac{dz}{d\zeta}$ proportional $\zeta$,

$\zeta = 0$, z " $\ln \zeta$, " $\frac{dz}{d\zeta}$ " $\frac{1}{\zeta}$.

Folglich $\frac{dz}{d\zeta} = C \frac{(\zeta - \zeta_1)(\zeta - \zeta_3)}{\zeta} \left\{1 + F(\zeta)\right\}$.

Fig. 35, 66. B) $\zeta = \infty$, z proportional $\zeta$, $\frac{dz}{d\zeta} = \text{const}$,

$\zeta = 0$, z " $\frac{1}{\zeta}$, $\frac{dz}{d\zeta}$ proportional $\frac{1}{\zeta^2}$.

Folglich $\frac{dz}{d\zeta} = C \frac{(\zeta - \zeta_1)(\zeta - \zeta_4)}{\zeta^2} \left\{1 + F(\zeta)\right\}$.

Fig. 36. C) $\zeta = \infty$, z proportional $\zeta$, $\frac{dz}{d\zeta} = \text{const}$,

$\zeta = \zeta'$, z " $\frac{1}{\zeta - \zeta'}$, $\frac{dz}{d\zeta}$ proportional $\frac{1}{(\zeta - \zeta')^2}$,

$\zeta = 0$, z " $\ln \zeta$, $\frac{dz}{d\zeta}$ " $\frac{1}{\zeta}$.

Folglich $\frac{dz}{d\zeta} = C \frac{(\zeta - \zeta_1)(\zeta - \zeta_3)(\zeta - \zeta_4)}{\zeta(\zeta - \zeta')^2} \left\{1 + F(\zeta)\right\}$.

Fig. 37, 67. D) $\zeta = \infty$, z proportional $\ln \zeta$, $\frac{dz}{d\zeta}$ proportional $\frac{1}{\zeta}$,

$\zeta = \zeta^{(\lambda)}$, z " $\frac{1}{\zeta - \zeta^{(\lambda)}}$, $\frac{dz}{d\zeta}$ " $\frac{1}{(\zeta - \zeta^{(\lambda)})^2}$ $[\lambda = \text{I, II}]$,

$\zeta = 0$, z " $\ln \zeta$, $\frac{dz}{d\zeta}$ " $\frac{1}{\zeta}$.

Folglich $\frac{dz}{d\zeta} = C \frac{(\zeta - \zeta_1)(\zeta - \zeta_2)(\zeta - \zeta_3)(\zeta - \zeta_4)}{\zeta(\zeta - \zeta')^2(\zeta - \zeta'')^2} \left\{1 + F(\zeta)\right\}$.

$\frac{dz}{d\zeta}$ kann in der ganzen $\zeta$-Ebene nur für die angeführten Stellen 0 und $\infty$ werden. Denn da reellen Werthen von $\zeta$ rein imaginäre von $\frac{dz}{d\zeta}$ entsprechen, so würden, wenn in der Halbebene $\Re\left(\frac{\zeta}{i}\right) < 0$ singuläre Stellen vorkämen, die ihnen conjugirten Stellen ebenfalls singulär sein, was nicht möglich ist.

Auch an den Stellen, an denen der erste Factor 0 oder $\infty$ wird, kann $F(\zeta)$ weder von angebbarer Ordnung $\infty$ werden, da sonst die Ordnungszahl des Verschwindens oder $\infty$ Werdens der Ableitung geändert würde, noch logarithmisch $\infty$ wegen der Eindeutigkeit der Ableitung. $F(\zeta)$ reducirt sich daher auf eine Constante.

Durch Partialbruchzerlegung erhält man:

A) $\frac{dz}{d\zeta} = A_1\zeta + A_2 + \frac{A_3}{\zeta}$,

B) $\frac{dz}{d\zeta} = B_1 + \frac{B_2}{\zeta} + \frac{B_3}{\zeta^2}$,

C) $\frac{dz}{d\zeta} = C_1 + \frac{C_2}{\zeta} + \frac{C_3}{\zeta - \zeta'} + \frac{C_4}{(\zeta - \zeta')^2}$,

D) $\frac{dz}{d\zeta} = \frac{D_1}{\zeta} + \frac{D_2}{\zeta - \zeta'} + \frac{D_3}{(\zeta - \zeta')^2} + \frac{D_4}{\zeta - \zeta''} + \frac{D_5}{(\zeta - \zeta'')^2}$,

woraus durch Integration:

A) $z = a_0 + a_1\zeta^2 + a_2\zeta + a_3 \ln \zeta$,

B) $z = b_0 + b_1\zeta + b_2 \ln \zeta + \frac{b_3}{\zeta}$,

C) $z = c_0 + c_1\zeta + c_2 \ln \zeta + c_3 \ln(\zeta - \zeta') + \frac{c_4}{\zeta - \zeta'}$,

D) $z = d_0 + d_1 \ln \zeta + d_2 \ln(\zeta - \zeta') + \frac{d_3}{\zeta - \zeta'} + d_4 \ln(\zeta - \zeta'') + \frac{d_5}{\zeta - \zeta''}$.

Setzt man $\zeta = e^{wi}$, so wird die betrachtete Halbebene auf einen unendlich langen Streifen parallel der Axe des Imaginären von der Breite $\pi$ abgebildet, dessen Seiten den Elektroden entsprechen. Nimmt man ihn zwischen den Punkten 0 und $\pi$ an, so entspricht die Axe des Imaginären der Elektrode mit kleinerer Abscisse.

Es wird nun:

A) $z = a_0 + a_1 e^{2wi} + a_2 e^{wi} + a_3 wi$,

B) $z = b_0 + b_1 e^{wi} + b_2 wi + b_3 e^{-wi}$,

C) $z = c_0 + c_1 e^{wi} + c_2 wi + c_3 \ln(e^{wi} - \zeta') + \frac{c_4}{e^{wi} - \zeta'}$,

D) $z = d_0 + d_1 wi + d_2 \ln(e^{wi} - \zeta') + \frac{d_3}{e^{wi} - \zeta'} + d_4 \ln(e^{wi} - \zeta'') + \frac{d_5}{e^{wi} - \zeta''}$.

Es ist zu vermuthen, dass z überall als eindeutige Function von w darstellbar sein wird. Dann müssen die Coefficienten der Logarithmen verschwinden. Nach dem Gesetze der Spiegelung muss z die Bedingungen erfüllen:

1) $z(w + 2\pi) = z(w) + 2E$,

2) $\Re[z(vi)] = \text{const}, \; \Re[z(\pi + vi)] = \text{const}$.

Aus 1) folgt

$$2E = a_3 \cdot 2\pi i = b_2 \cdot 2\pi i = c_2 \cdot 2\pi i = d_1 \cdot 2\pi i.$$

Aus 2) folgt, dass alle übrigen multiplicativen Constanten rein imaginär werden. Bezeichnet man durch griechische Buchstaben reelle Grössen, so kann man also schreiben:



$$\text{A)}\quad z = a_0 + i\left\{\alpha_1 e^{2wi} + \alpha_2 e^{wi}\right\} + \frac{E}{\pi} w,$$

$$\text{B)}\quad z = b_0 + i\left\{\beta_1 e^{wi} + \beta_2 e^{-wi}\right\} + \frac{E}{\pi} w,$$

$$\text{C)}\quad z = c_0 + i\left\{\gamma_1 e^{wi} + \frac{\gamma_2}{e^{wi} - \zeta'}\right\} + \frac{E}{\pi} w,$$

$$\text{D)}\quad z = d_0 + i\left\{\frac{\delta_1}{e^{wi} - \zeta'} - \frac{\delta_2}{e^{wi} - \zeta''}\right\} + \frac{E}{\pi} w.$$

Um die Vorzeichen der Coefficienten zu bestimmen, hat man für alle im Endlichen und im Unendlichen gelegenen Stellen der beiden Geraden $w = vi$ und $w = \pi + vi$, für die $z = \infty$ wird, die Art des $\infty$ gross Werdens zu untersuchen (vergl. die Figuren).

Mit Rücksicht darauf, dass $\zeta' < 0 < \zeta''$, ergiebt sich, dass $\alpha_1$, $\beta_1$, $\beta_2$, $\gamma_1$, $\gamma_2$, $\delta_1$, $\delta_2$ alle positiv sind. Das Vorzeichen von $\alpha_2$ bleibt unbestimmt.

Ersetzt man $w$ durch $w + v'i$, so wird der Punkt $w = 0$ auf der Axe des Imaginären verschoben. Man kann nun $v'$ folgenden Bedingungen gemäss bestimmen:

$$\text{A)}\quad e^{-2v'} = \frac{1}{\alpha_1}; \qquad \text{B)}\quad e^{2v'} = \frac{\beta_1}{\beta_2};$$

$$\text{C)}\quad e^{v'} = -\frac{1}{\zeta'}; \qquad \text{D)}\quad e^{-2v'} = -\zeta'\zeta'' \text{ und } \zeta''.\,e^{v'} = e^{m}.$$

Dann werden die Functionen nach Einführung neuer Coefficienten:

$$\text{A)}\quad z = A_0 + i\left\{e^{2wi} + 2\alpha e^{wi}\right\} + \frac{E}{\pi} w,$$

$$\text{B)}\quad z = B_0 + i\beta\frac{e^{wi} + e^{-wi}}{2} + \frac{E}{\pi} w = B_0 + i\beta \cos w + \frac{E}{\pi} w \qquad (\beta > 0),$$

$$\text{C)}\quad z = C_0 + i\left\{\gamma_1 e^{wi} + \frac{\gamma_2}{e^{wi} + 1}\right\} + \frac{E}{\pi} w \qquad (\gamma_1 > 0,\ \gamma_2 > 0),$$

$$\text{D)}\quad z = D_0 + i\left\{\frac{\delta_1}{e^{wi} + e^{-m}} - \frac{\delta_2}{e^{wi} - e^{m}}\right\} + \frac{E}{\pi} w \qquad (\delta_1 > 0,\ \delta_2 > 0).$$

Abgesehen von E und den additiven Constanten sind in A) und B) noch je eine, in C) zwei, in D) drei willkürliche reelle Constanten enthalten, also genau so viel, als zur Bestimmung der Figuren der z-Ebene, wenn vom Maassstab abgesehen wird, erforderlich sind.

Für die Fälle A) und B) lässt sich leicht nachweisen, dass es stets möglich ist, die willkürliche Constante den Bedingungen der Aufgabe gemäss zu bestimmen.

A) Zur Bestimmung der Elektrodenenden dient die Gleichung:

$$\frac{dz}{dw} = -2\zeta^2 - 2\alpha\zeta + \frac{E}{\pi} = 0,$$

woraus
$$\zeta_1 = -\frac{\alpha}{2} + \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + \frac{E}{2\pi}}, \quad \zeta_3 = -\frac{\alpha}{2} - \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + \frac{E}{2\pi}},$$
da $\zeta_1 > 0$, $\zeta_3 < 0$ sein muss. Durch Einsetzen erhält man:
$$z_3 - z_1 = i(\zeta_3^2 - \zeta_1^2) + 2\alpha i(\zeta_3 - \zeta_1) + \frac{E}{\pi} \ln \frac{\zeta_3}{\zeta_1},$$
$$z_3 - z_1 = -\alpha i \sqrt{\alpha^2 + \frac{2E}{\pi}} + \frac{E}{\pi i} \ln \frac{\pi}{2E}\left(\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \frac{2E}{\pi}}\right)^2 + E.$$

Für $\alpha = -\infty$ wird $z_3 - z_1 - E = +\infty i$.
Für $\alpha = 0$ wird $z_3 - z_1 - E = 0$.
Für $\alpha = +\infty$ wird $z_3 - z_1 - E = -\infty i$.

Fig. 65.

Da $z_3 - z_1 - E$ eine stetige Function von $\alpha$ ist, so muss für jeden imaginären Werth von $z_3 - z_1 - E$ mindestens ein reeller Werth von $\alpha$ existiren, der jener Gleichung genügt. Dass nur ein Werth von $\alpha$ existirt, folgt daraus, dass
$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{z_3 - z_1 - E}{i}\right) = -2\sqrt{\alpha^2 + \frac{2E}{\pi}}$$
für alle reellen Werthe von $\alpha$ negativ ist.

B) Aus
$$\frac{dz}{dw} = -i\beta \sin w + \frac{E}{\pi} = 0$$
folgen zwei Werthe, $w_1$ und $w_4 = \pi - w_1$. Es ist
$$i \sin w_1 = \frac{e^{w_1 i} - e^{-w_1 i}}{2} = \frac{E}{\beta\pi}$$
positiv, also $w_1 i$ und $\cos w_1$ positiv. Nun wird
$$z_4 - z_1 = i\beta(\cos w_4 - \cos w_1) + \frac{E}{\pi}(w_4 - w_1),$$
$$z_4 - z_1 = -2\beta i \cos w_1 + \frac{E}{\pi}(\pi - 2w_1),$$
$$z_4 - z_1 = -2\beta i \sqrt{1 + \frac{E^2}{\beta^2\pi^2}} - \frac{2E}{\pi i} \ln\left(\frac{E}{\beta\pi} + \sqrt{1 + \frac{E^2}{\beta^2\pi^2}}\right) + E.$$

Für $\beta = \infty$ wird $z_4 - z_1 - E = -\infty i$.
Für $\beta = 0$ wird $z_4 - z_1 - E = +\infty i$.

Da $z_4 - z_1 - E$ für positive Werthe von $\beta$ stetig ist, so muss für jeden imaginären Werth von $z_4 - z_1 - E$ mindestens ein positiver Werth von $\beta$ existiren, der jener Gleichung genügt. Dass nur einer existirt, folgt daraus, dass
$$\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{z_4 - z_1 - E}{i}\right) = -\frac{2}{\beta}\sqrt{\beta^2 + \frac{E^2}{\pi^2}}$$
für jeden positiven Werth von $\beta$ negativ ist. —

Wie früher lässt sich hier in allen vier Unterfällen von IX. der Schwerpunkt der zwei, drei bez. vier Elektrodenenden berechnen. Die Grössen $\Sigma z_k$ sind nämlich Functionen ganzer symmetrischer Functionen der Grössen $\zeta_k$, d. h. der Wurzeln der zugehörigen Gleichungen $\frac{dz}{dw} = F(\zeta) = 0$, und daher einfach ausdrückbar durch die Coefficienten dieser Gleichungen.

Auf diese Weise ergiebt sich:

A) $\frac{z_1 + z_3}{2} = A_0 + \frac{E}{2} + \frac{Ei}{2\pi}\left(1 - \ln\frac{E}{2\pi}\right) - \frac{\alpha^2 i}{2}$.

B) $\frac{z_1 + z_4}{2} = B_0 + \frac{E}{2}$,

C) $\frac{z_1 + z_3 + z_4}{3} = C_0 + \frac{i}{3}\left\{\frac{E}{\pi}\left(1 - \ln\frac{E}{\pi\gamma_1}\right) - 2\gamma_1 + \gamma_2\right\}$,

D) $\frac{z_1 + z_2 + z_3 + z_4}{4} = D_0 + \frac{E}{2} + \frac{i}{4} \cdot \frac{\delta_1(3 + e^m) + \delta_2(3 + e^{-m})}{e^m + e^{-m}}$.

Es bleibt das Verhalten der Spannungs- und Strömungscurven in der Nähe der Unendlichkeitsstellen zu betrachten.

Für $\lim v = +\infty$ erhält man in A), C), D): $z = \frac{E}{\pi}(u + vi) + \ldots$, also parallele Gerade; in B): $z = \frac{i\beta}{2}e^{-ui+v} + \ldots$, also eine concentrische Kreisschaar mit dem orthogonalen Strahlenbüschel.

Für $\lim v = -\infty$ erhält man in B) und C) dasselbe wie vorher, in A): $z = ie^{2ui-2v} + \ldots$, in C): $z = i\gamma_1 e^{ui-v} + \ldots$, also concentrische Kreisschaaren mit orthogonalen Strahlenbüscheln.

Setzt man in C) $w = \pi + u + vi$ (wo $u$ und $v$ sehr klein sind), so wird $z - c = \frac{i\gamma_2}{1 - e^{ui-v}}$. Durch Eliminirung von $u$ bez. $v$ ergiebt sich, ebenso wie in den analogen Fällen in D), eine Doppelschaar von Kreisen, die durch einen Punkt gehen. —

Fig. 38. B') „Die Elektroden liegen in einer Geraden." —

Dann wird $E = 0$, also

$$z = B_0 + i\beta \cos w.$$

Bei einer Drehung der $w$-Ebene um 90° wird die Function identisch mit der unter VII. C) gefundenen. Das Strömungsnetz geht durch Vertauschung von Spannungs- und Strömungscurven aus jenem hervor. —

Fig. 39. D') „Es trete eine zu den Elektroden senkrechte Symmetrieaxe auf." —

Es ist zu vermuthen, dass diese eine Strömungslinie durch die auf beiden Seiten der Elektroden liegenden unendlich fernen Punkte darstellen wird, dass



also die beiden durch diese Punkte gehenden Strömungslinien des Falles D) hier zusammenfallen. Dann müssen die zu $z = \infty$ gehörigen Werthe von $w$, nämlich $w = \frac{m}{i}$ und $w = \pi - \frac{m}{i}$ gleiche imaginäre Bestandtheile besitzen, d. h. es muss $m = 0$ sein. Die abbildende Function wird, wenn man den Punkt $z = 0$ in den Schwerpunkt der vier Elektrodenenden verlegt:

$$z = i\left\{\frac{\delta_1}{e^{wi}+1} - \frac{\delta_2}{e^{wi}-1}\right\} + \frac{E}{\pi}w - \frac{E}{2} - i\frac{\delta_1+\delta_2}{2}$$

oder auch

$$z = \frac{\delta_1}{2}\,\mathrm{tg}\,\frac{w}{2} - \frac{\delta_2}{2}\,\mathrm{cotg}\,\frac{w}{2} + \frac{E}{\pi}w - \frac{E}{2}.$$

In der That entsprechen hier reellen Werthen von $w$ solche von $z$. —

D'') „Es trete eine zweite, den Elektroden parallele Symmetrieaxe auf.“ — Fig. 40, 67.

Es ist zu vermuthen, dass dies eine Spannungscurve sein wird. Dann folgt aus dem Satze der Spiegelung:

$$z(vi+\pi) - z(vi) = E.$$

Daraus ergiebt sich, dass, welchen Werth auch $v$ annehme, $2\frac{\delta_1-\delta_2}{e^{-v}-e^{v}} = 0$, also $\delta_1 = \delta_2$ sein muss. Setzt man $w = W + \frac{\pi}{2}$, so wird

$$z = \frac{E}{\pi}W + \delta_1\,\mathrm{tg}\,W \qquad (\delta_1 > 0).$$

Der Beweis der Möglichkeit, die Constanten der Function nach den Bedingungen der Aufgabe zu bestimmen, lässt sich so führen: Aus

$$\frac{dz}{dW} = \frac{E}{\pi} + \frac{\delta_1}{\cos^2 W_k} = 0$$

folgt, da $W_k = \varepsilon_k\frac{\pi}{2} + V_k i$ (wo $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$, $\varepsilon_3 = \varepsilon_4 = -1$):

$$\delta_1 = -\frac{E}{\pi}\cos^2 W_k = \frac{E}{\pi}\left(\frac{e^{V_k}-e^{-V_k}}{2}\right)^2.$$

Setzt man $\delta_1$ ein, so wird die Function:

$$z = \frac{E}{\pi}\left\{W - \cos^2 W_k\,\mathrm{tg}\,W\right\}.$$

Für $W = W_k$ erhält man das Elektrodenende:

$$z_k = \frac{E}{2\pi}\{2W_k - \sin 2W_k\} = \varepsilon_k\frac{E}{2} + \frac{Ei}{2\pi}\left\{2V_k + \frac{e^{2V_k}-e^{-2V_k}}{2}\right\}.$$

Wenn $V_k = 0$ $(\delta_1 = 0)$, so wird $z_k - \varepsilon_k\cdot\frac{E}{2} = 0$.

Wenn $V_k = \pm\infty$ $(\delta_1 = +\infty)$, so wird $z_k - \varepsilon_k\cdot\frac{E}{2} = \pm\infty i$.

Da $z_k - \varepsilon_k \frac{E}{2}$ eine stetige Function von $V_k$ ist, so existirt für jeden vorgeschriebenen imaginären Werth dieser Summe mindestens ein Werth von $V_k$, der die Gleichung befriedigt. Da

$$\frac{\partial}{\partial V_k}\left(\frac{z_k - \varepsilon_k \cdot \frac{E}{2}}{i}\right) = \frac{E}{\pi}\left\{1 + \frac{e^{2V_k} + e^{-2V_k}}{2}\right\} = \frac{E}{2\pi}(e^{V_k} + e^{-V_k})^2$$

stets positiv ist, so giebt es nur einen zugehörigen Werth von $V_k$. —

## X. „Die Elektroden mögen eine Strecke gemeinsam haben in der Art, dass jede überall auf demselben Ufer der andern liegend zu denken ist." —

Setzt man die Längen der Elektroden zunächst als endlich voraus, so sind zwei Hauptfälle zu unterscheiden:

Fig. 41. X. A) „Die Enden einer Elektrode liegen beide zwischen den Enden der andern." —

Fig. 42. X. B) „Je ein Ende der einen Elektrode liege zwischen den Enden der andern." —

Ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit kann man in beiden Fällen die äussersten Enden in die Punkte $z = \pm i$ verlegt denken. Denkt man sich die z-Ebene längs der Elektroden aufgeschnitten, so kann man den nicht aufgeschnittenen Theil zusammenhängend auf die Fläche eines mit dem Radius 1 um den Punkt $\zeta = 0$ beschriebenen Kreises abbilden, indem man setzt (Fig. 43, 44.)

$$z = \frac{1}{2}\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right).$$

Der doppelten Strecke $\pm i$ der z-Ebene entspricht dann die einfache Kreislinie. Den Punkten $z = \pm i$ entsprechen die Punkte $\zeta = \pm i$. Im Falle A) entsprechen die beiden Kreisbogen zwischen $\zeta_3$ und $\zeta_4$, im Falle B) die zwischen $\zeta_3$ und $\zeta_2$ den verschiedenen Elektroden. Durch reciproke Radien kann man den Kreis auf eine Halbebene $\Re(Z) > 0$ so abbilden, dass $Z$ für $\zeta = \zeta_3$ unendlich gross wird, während dem Punkte $Z = 0$ im Falle A) $\zeta = \zeta_1$, im Falle B) $\zeta = \zeta_2$ entspricht. (Fig. 45.)

Setzt man $\zeta = \varrho \cdot e^{\varphi i}$, so wird

$$\text{A)} \quad Z = i e^{\frac{\varphi_3 - \varphi_4}{2} i} \cdot \frac{\zeta - \zeta_4}{\zeta - \zeta_3},$$

$$\text{B)} \quad Z = i e^{\frac{\varphi_3 - \varphi_2}{2} i} \cdot \frac{\zeta - \zeta_2}{\zeta - \zeta_3}.$$

Setzt man endlich $z = -i e^{-wi}$, so wird die Halbebene auf einen unendlich langen Parallelstreifen in der w-Ebene parallel der Axe des Imaginären abgebildet, in dem den Spannungs- und Strömungscurven gerade Linien entsprechen. In Folge der Gleichung: Fig. 45.

$$z_k = \frac{1}{2}\left(\zeta_k - \frac{1}{\zeta_k}\right) = i \sin \varphi_k$$

wird für A):

$$z = \frac{z_3 e^{-wi} + 2i \sin \frac{\varphi_3 + \varphi_4}{2} + z_4 e^{wi}}{e^{-wi} + 2 \cos \frac{\varphi_3 - \varphi_4}{2} + e^{wi}}.$$

$\varphi_3$ und $\varphi_4$ können darin mit Rücksicht auf die willkürlich angenommenen Ungleichungen $\frac{\pi}{2} \leq \varphi_4 < \varphi_3 \leq \frac{3\pi}{2}$ eindeutig als Functionen von $z_3$ und $z_4$ bestimmt werden. Der Cosinus ist hier nie negativ.

Ferner wird für B):

$$z = \frac{z_3 e^{-wi} + 2i \sin \frac{\varphi_3 + \varphi_2}{2} + z_2 e^{wi}}{e^{-wi} + 2 \cos \frac{\varphi_3 - \varphi_2}{2} + e^{wi}},$$

wo für $\varphi_3$ und $\varphi_2$ etwa die Ungleichungen gelten sollen $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi_2 \leq \frac{\pi}{2} < \varphi_3 \leq \frac{3\pi}{2}$. Der Sinus ist hier nie negativ.

Die Möglichkeit, die Constanten der Function eindeutig nach den Bedingungen der Aufgabe zu bestimmen, erhellt daraus, dass sie eindeutig durch die Constanten, die die Figuren bestimmen ($z_3$, $z_4$ bez. $z_3$, $z_2$) ausgedrückt werden können. —

„Es existire in A) eine Symmetrieaxe, in B) ein Mittelpunkt der Symmetrie." —

A') Hier ist $z_3 = -z_4$, also $\varphi_3 = 2\pi - \varphi_4$; folglich wird: Fig. 46, 68.

$$z = \frac{z_4 i \sin w}{\cos w + \sqrt{1 + z_4^2}}.$$

Da zu reellen Werthen von w solche von z gehören, so entsprechen auch conjugirten Werthen von w solche von z. Die Symmetrieaxe stellt eine Strömungslinie dar. Da nun A) sich aus A') durch reciproke Radien herleiten lässt, so ist in A) allgemein eine Strömungslinie kreisförmig. —

B') Hier ist $z_3 = -z_2$, also $\varphi_3 = \pi + \varphi_2$; folglich wird: Fig. 47.

$$z = i \frac{z_2 \sin w + \sqrt{1 + z_2^2}}{\cos w}.$$

Setzt man $w = \bar{w} - \frac{\pi}{2}$, so wird $z(\bar{w}) = -z(-\bar{w})$. —

Fig. 48. A″) „Es werde in A′) $z_4 = i$“. —

B″) „Es werde in B′) $z_2 = -i$“. —

Dann wird in beiden Fällen $z = -\operatorname{tg} w$.

Das Strömungsnetz geht in eine Steinersche Kreisschaar über. Man erhält dieselbe Figur, zu welcher zwei punktförmige Elektroden in den Punkten $\pm i$ führen, wenn man Spannungs- und Strömungscurven vertauscht. —

Nimmt man jetzt an, dass eine oder beide Elektroden sich nach einer oder nach zwei Richtungen ins Unendliche erstrecken, so erhält man acht durch die Figuren veranschaulichte Unterfälle, von denen die vier ersten sich durch reciproke Radien aus A) herleiten lassen, wenn man den Transformationsmittelpunkt der Reihe nach in $z_1$, $z_3$ oder auf den Strecken $z_1 z_3$, $z_3 z_4$ annimmt, die vier letzten aus B), wenn man ihn der Reihe nach in $z_1$, $z_3$, oder auf den Strecken $z_1 z_3$, $z_3 z_2$ annimmt. —

Fig. 49. Fig. 50. Fig. 51.

## XI. „Die eine Elektrode sei punktförmig und rücke unendlich nahe an die andere heran.“ —

Man kann die Endpunkte der letzteren zunächst wieder in die Punkte $z = \pm i$ verlegen. Dann wird durch die Function

$$z = \frac{1}{2}\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right)$$

Fig. 52. die z-Ebene so auf eine Kreisfläche abgebildet, dass der zwischen $\pm i$ liegenden Elektrode die ganze Peripherie entspricht. Den Kreis kann man

Fig. 45. auf eine Halbebene $\Re(Z) > 0$ abbilden, so dass der punktförmigen Elektrode der Punkt $Z = \infty$ entspricht, indem man setzt:

$$Z = \frac{a\zeta + b}{\zeta - \zeta_3}.$$

In der Halbebene entsprechen dann den Spannungs- und Strömungscurven gerade Linien. Setzt man $b = a\zeta_3$, so wird $Z = 0$ für $\zeta = -\zeta_3$. Es ist zu vermuthen, dass dem durch die Punkte $\zeta = \pm\zeta_3$ gehenden Kreisdurchmesser eine Strömungslinie, also in der $Z$-Ebene die Axe des Reellen entsprechen wird. Soll $Z = 1$ für $\zeta = 0$ werden, so wird

$$Z = \frac{\zeta_3 + \zeta}{\zeta_3 - \zeta}.$$

Setzt man $\zeta_3 = e^{\eta_3 i}$ und bestimmt, dass die punktförmige Elektrode auf dem der positiven x-Axe entsprechenden Ufer der andern liegen soll, dass also





$\frac{\pi}{2} < \varphi_3 < \frac{3\pi}{2}$, so wird $i \sin\varphi_3 = z_3$, $\cos\varphi_3 = -\sqrt{1+z_3^2}$, und es folgt:

$$z = \frac{z_3 Z^2 + 2\sqrt{1+z_3^2} \cdot Z + z_3}{Z^2 - 1}.$$

Die Constante der Function stimmt mit der die Figur bestimmenden überein. Man überzeugt sich leicht, dass zu $Z = \infty$ wirklich $z = z_3$, und zu imaginären Werthen von $Z$ solche von $z$ zwischen $+i$ und $-i$ gehören. —

XI. A) Für $z_3 = -i$ wird $z = i\frac{1+Z^2}{1-Z^2}$. Fig. 53.

Dieser Fall ist auch aus VII. B) und V. A‴) herzuleiten. —

XI. B) Für $z_3 = 0$ wird $z = \frac{2Z}{Z^2-1}$. Fig. 54, 69.

Da hier eine Strömungscurve geradlinig wird, so tritt allgemein in XI. eine **kreisförmige** Strömungscurve auf. —

Die Fälle, in denen die eine Elektrode sich nach einer oder nach zwei Richtungen ins Unendliche erstreckt, während die punktförmige im Endlichen oder unendlich fern liegt, sind durch reciproke Radien aus den vorhergehenden zu erhalten, indem man den Transformationsmittelpunkt der Reihe nach etwa in $z_2$, oder auf der Strecke $z_2 z_3$, oder in $z_3$ annimmt. Fig. 55.

A′) Setzt man z. B. im Falle A) $Z = a\frac{z-i}{z+i} = aZ^2$, so erhält man den Fall einer Doppelschaar von **Parabeln**. (Vergl. VII. D). — Fig. 55, f.

B′) Setzt man in B) $Z = \frac{a}{z} = \frac{a}{2}\left(Z - \frac{1}{Z}\right)$, so erhält man den Fall, in dem eine Elektrode die Verlängerungen einer endlichen Strecke darstellt, während die andere unendlich fern liegt. — Fig. 55, e.

Die durch Fig. 56 bis 59 dargestellten Fälle lassen sich durch Vertauschung von Spannungs- und Strömungscurven auf den Fall einer oder zweier punktförmiger Elektroden zurückführen. Der durch Fig. 60 dargestellte Fall ergiebt eine Doppelschaar gerader Linien. —

---

## Anfertigung der Zeichnungen.

Zur Veranschaulichung des Strömungsnetzes sind für eine Reihe von Fällen einige Spannungs- und Strömungscurven in der Weise gezeichnet worden, dass die ihnen in der Ebene des Arguments entsprechenden **Geraden** den abgebildeten Bereich in **Quadrate** eintheilen. Für die Figuren 61 bis 68 sind die Schnittpunkte der beiden Curvenschaaren durch numerische Rechnung



ermittelt, für Fig. 69 sind sie durch Transformation mittelst reciproker Radien aus der Fig. 9 der Dissertation des Herrn Hans Meyer mit Cirkel und Lineal construirt. Für Fig. 64 wurden nach einer geeigneten Umformung der abbildenden Function die für Fig. 61 gefundenen numerischen Resultate benutzt.

Die Constanten der Functionen sind nach verschiedenen Gesichtspunkten gewählt. In allen Fällen sind die auf Symmetrieaxen liegenden Curven und diejenigen, die sich durch ihre Erstreckung ins Unendliche vor den andern Curven der betreffenden Schaar auszeichnen, mitgezeichnet worden. In Fig. 61 zeigte sich, dass für $\omega_1 = \frac{\pi}{2}$ die Werthe

$$z_1 = E\{0,5 + 0,45186 \,.\, i\} \text{ und } z(\omega_1 - \tfrac{3}{8}\omega_3) = E\{0,5 + 0,45193 \,.\, i\}$$

nahe übereinstimmen, so dass zwei der zu zeichnenden Strömungslinien nahezu durch die Elektrodenenden gehen. In Fig. 63 ist die kreisförmige Strömungscurve zur Darstellung gebracht. Hier liegt das Strömungsnetz im Innern des Kreises symmetrisch in Bezug auf den Kreis gegen das im Aeussern des Kreises. In den Fig. 65 bis 67 und 69 sind die durch die Elektrodenenden gehenden Strömungscurven mitgezeichnet. In Fig. 64 war dies nur für das eine Paar derselben ausführbar.

Viele der in vorliegender Arbeit behandelten Specialfälle sind schon früher untersucht worden und für eine Reihe von ihnen sind die entsprechenden Strömungsnetze durch Zeichnungen veranschaulicht. So sind z. B. in der Holzmüllerschen „Theorie der conformen Abbildungen" Zeichnungen vorhanden zu den durch folgende Figuren dargestellten Fällen:

| Fig. | 15(16) | 58 | 28 | 60 | 23(59) | 27(38) | 19(20) | 33(57) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Holzm. Fig. | 35 | 8,12,38,40 | 33 | 8 | 12,42 | 38,60[a] | 62 | 43 |

Alle diese Fälle, ausser dem letzten, finden sich in sehr genauer Ausführung dargestellt unter den von Herrn Neovius veröffentlichten Zeichnungen. Unter den zu den Sohnckeschen „Aufgaben aus der Integralrechnung" gehörigen Figuren sind auf Taf. V und XIII Zeichnungen zu den durch Fig. 27 (38) und 28 dargestellten Fällen enthalten. Endlich entsprechen die Figuren auf Taf. I, V, IX der Dissertation des Herrn Hans Meyer den Fig. 27 (38), 28 und 55, e.



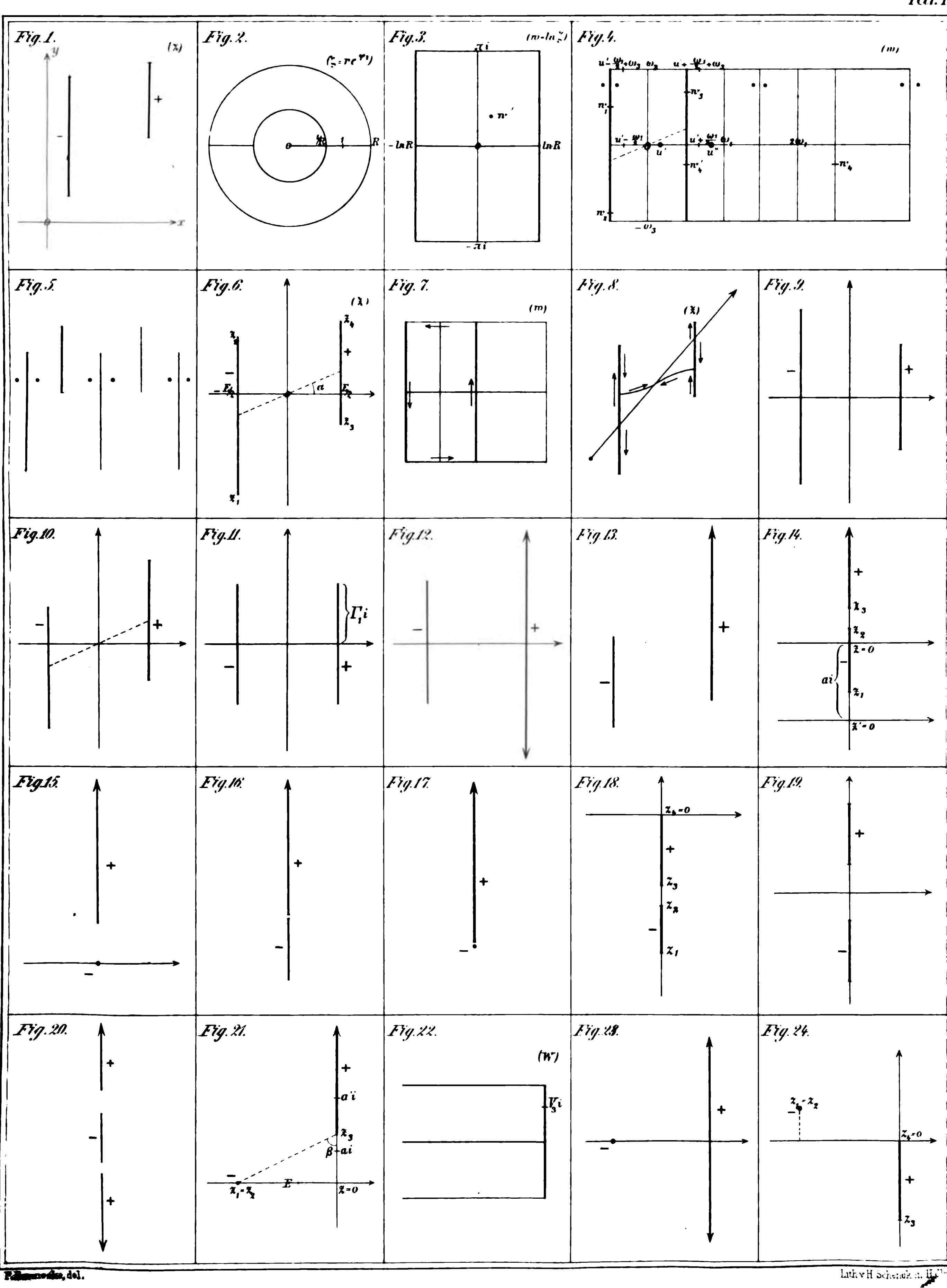
# Vita.

Verfasser, Friedrich Wilhelm Richard Bennecke, evangelischer Confession, Sohn des Technikers Richard Bennecke und der Frau Emma Bennecke, geb. Cauer, wurde am 23. Mai 1861 zu Potsdam geboren. Seine erste Schulbildung erhielt er, dem wechselnden Wohnsitze seiner Eltern entsprechend, in seiner Vaterstadt, dann in Frankfurt a. O. und in Westerhüsen bei Magdeburg. Seit Michaelis 1870 besuchte er die Lateinschule zu Schweinfurt und seit Ostern 1874 das Köllnische Gymnasium zu Berlin, das er Michaelis 1879 mit dem Zeugniss der Reife verliess.

Er widmete sich dem Studium der Mathematik und der Naturwissenschaften und studirte während der beiden ersten Semester in Göttingen, dann in Berlin, und vom 7. Semester an wieder in Göttingen, wo er am 7. November 1885 das Examen pro facultate docendi bestand.

Während seiner Studienzeit besuchte er die Vorlesungen und Uebungen der Herren: Baumann, Ehlers, Goedeke, Hettner, C. Klein, v. Koenen, Lotze, v. Mangoldt, H. Meyer, G. E. Müller, Reinke, Riecke, E. Schering, K. Schering, Schwarz, z. Solms, Stern, Voigt; Bruns, Glan, v. Helmholtz, Kirchhoff, Kronecker, Kummer, Paulsen, Wangerin, Weierstrass.

Allen diesen seinen hochverehrten Lehrern, insbesondere Herrn Professor Schwarz, dessen wohlwollender Rath diese Arbeit anregte, spricht Verfasser seinen aufrichtigen Dank aus.




del.

Lith. v H. Schenck

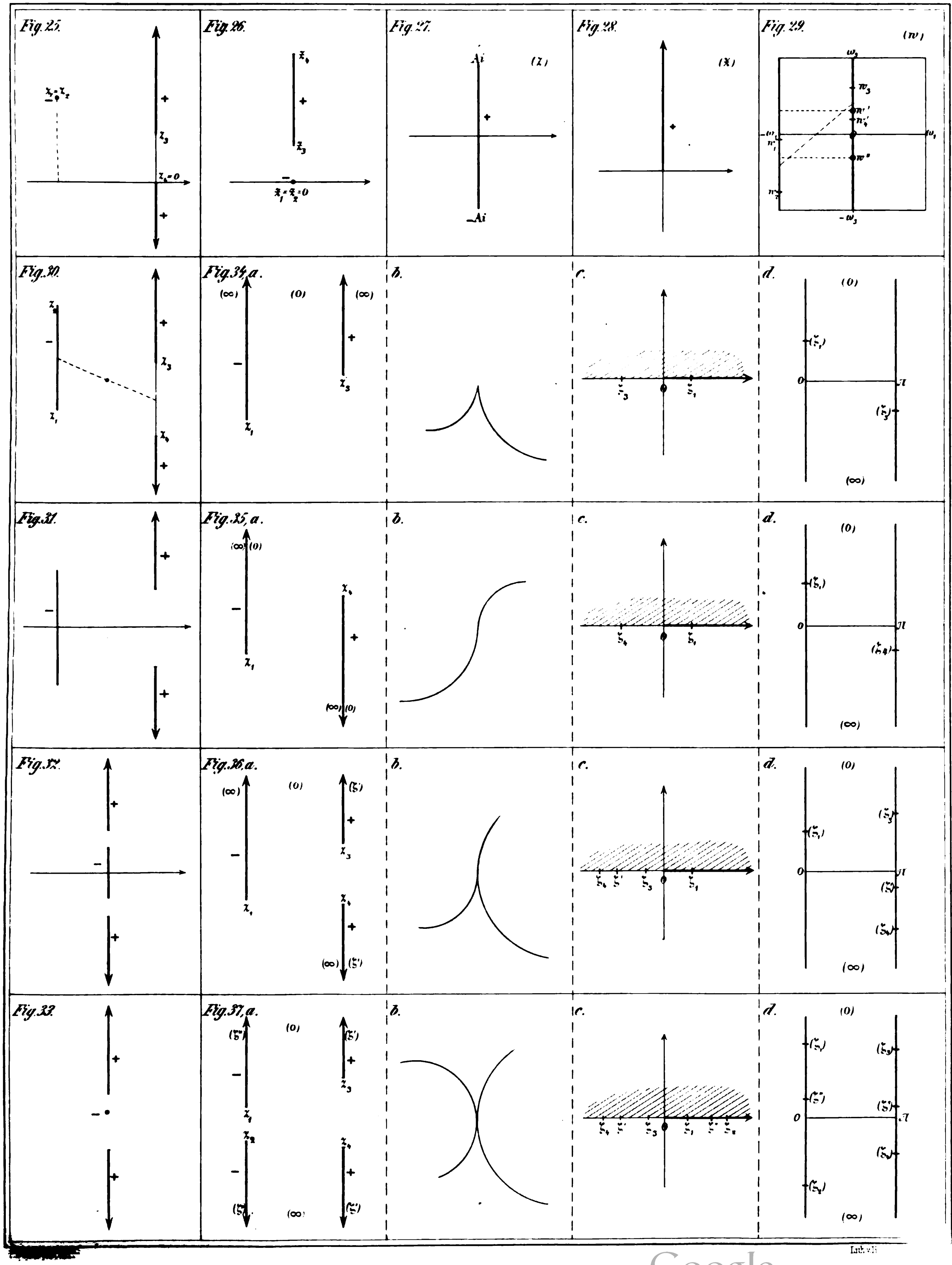

Fig. 25.
Fig. 26.
Fig. 27.
Fig. 28.
Fig. 29.
Fig. 30.
Fig. 34, a.
b.
c.
d.
Fig. 31.
Fig. 35, a.
b.
c.
d.
Fig. 32.
Fig. 36, a.
b.
c.
d.
Fig. 33.
Fig. 37, a.
b.
c.
d.

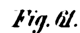
Fig. 38. Fig. 39. Fig. 40. Fig. 41. Fig. 42.

Fig. 43. Fig. 44. Fig. 45. Fig. 46. Fig. 47.

Fig. 48. Fig. 49. a. b. c. d. Fig. 50. a. b. c. d. Fig. 51.

Fig. 52. Fig. 53. Fig. 54. Fig. 55. a. b. c. d. e. f.

Fig. 56. Fig. 57. Fig. 58. Fig. 59. Fig. 60.



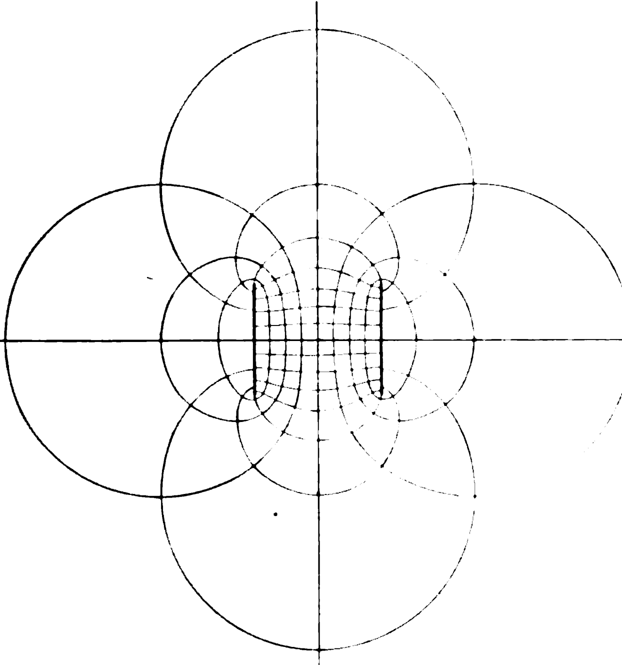


*Abbildung eines Rechtecks mit den Seiten $2\omega_1 = \pi$ und $2\omega_3 = 2\pi i$ auf eine unendliche Ebene durch die Function:*

$$z = \mathfrak{C}\left\{\frac{\sigma' w}{\sigma w} - \frac{\eta_3}{\omega_3}\, w\right\}.$$

*Fig. 62.*

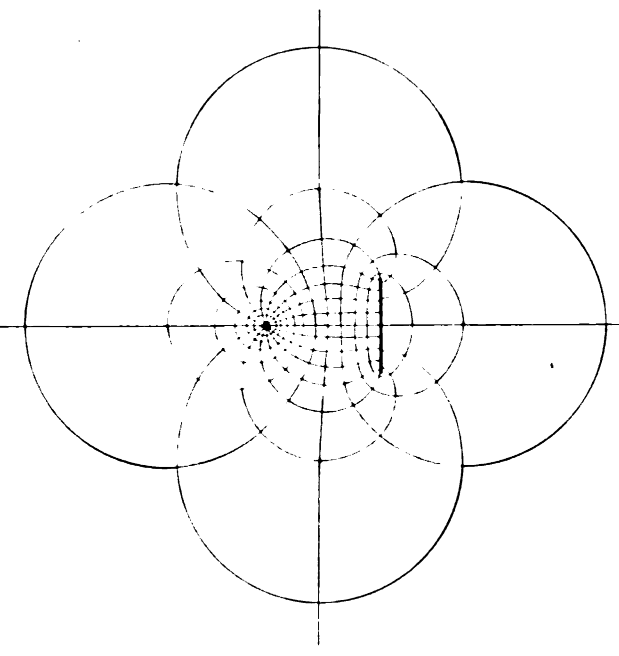


*Abbildung eines nach einer Richtung unbegrenzten Parallelstreifens von der Breite $2\pi i$ auf eine unendliche Ebene durch die Function:*

$$z = \frac{\mathfrak{C}}{2i}\left\{\cot g\,\frac{w + u'}{2i} + \cot g\,\frac{w - u'}{2i}\right\};\; u' = \frac{\pi}{2}.$$

*Fig. 63.*

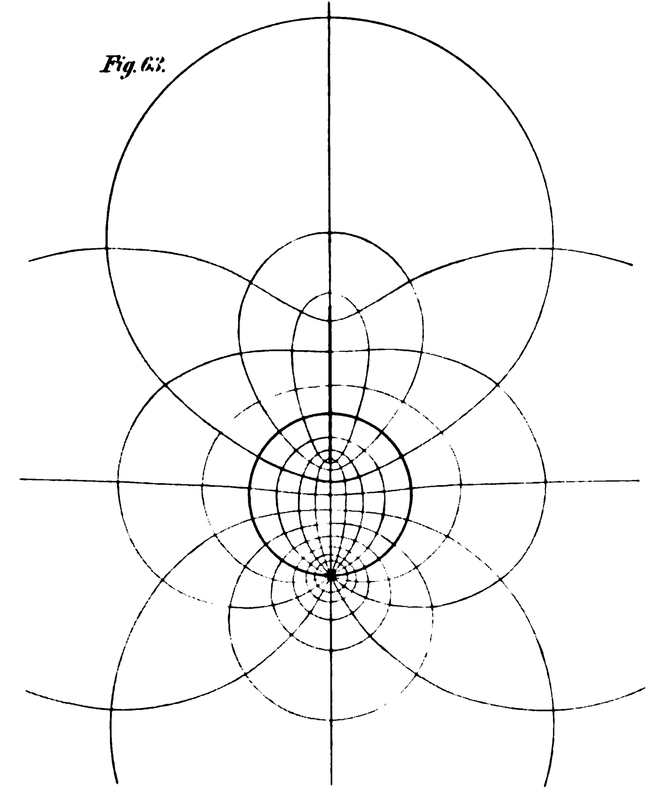


*Abbildung eines nach einer Richtung unbegrenzten Parallelstreifens von der Breite $2\pi i$ auf eine unendliche Ebene durch die Function:*

$$z = \frac{\mathfrak{B}_1'}{2}\left\{\cot g\,\frac{w + u'}{2i} - \cot g\,\frac{w - u'}{2i}\right\};\; u' = \frac{\pi}{2}.$$

*Fig. 64.*

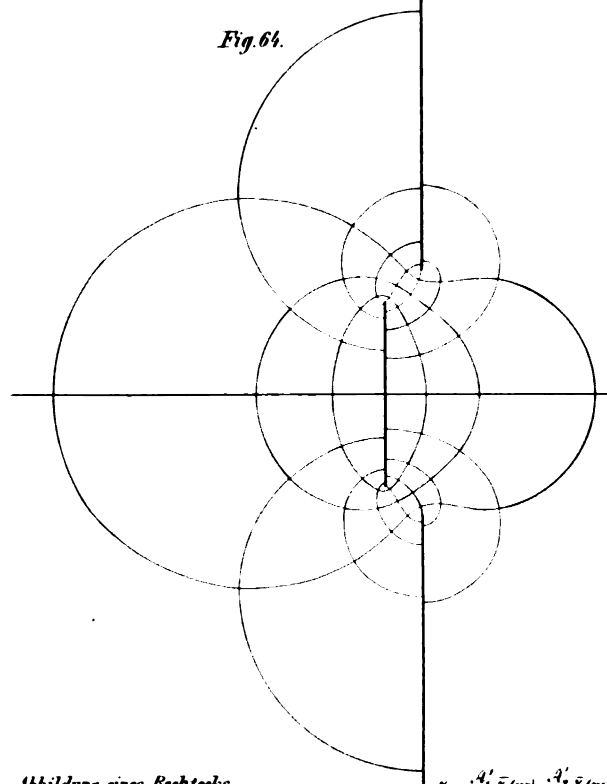


*Abbildung eines Rechtecks mit den Seiten $\omega_1 = \frac{\pi}{2}$ und $2\omega_3 = 2\pi i$ auf eine unendliche Ebene durch die Function:*

$$z = -\frac{\mathfrak{A}_1'}{2\mathfrak{C}}\,\bar{\zeta}(w) - \frac{\mathfrak{A}_2'}{2\mathfrak{C}}\,\bar{\zeta}(w + \omega_3);$$

$$\bar{\zeta}(w) = \mathfrak{C}\left\{\frac{\sigma' w}{\sigma w} - \frac{\eta_3}{\omega_3}\, w\right\},$$

$$\mathfrak{A}_1' + \mathfrak{A}_2' = -2\mathfrak{C};\; \mathfrak{A}_1' = \frac{19}{9}\mathfrak{C}.$$

F. Bennecke del.

*Abbildung*
*von der B*

*Abbildung eines nach*
*auf eine unendlich*

F. Bennecke del.

